Maths didactique

Chapitre 10 – Addition et soustraction

Les compétences concernant l'addition et la soustraction sur les nombres entiers naturels se construisent principalement entre le CP et le CE2, même si elles sont amorcées dès la maternelle. Elles sont ensuite étendues aux nombres décimaux en CM1 et CM2. Ces compétences sont :

- **Être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations**, d'abord par des **procédures personnelles** (élaborées par l'élève), puis en utilisant les **procédures expertes** (à partir de la reconnaissance que tel problème relève de telle opération).
- **Être capable de produire le résultat de tout calcul additif ou soustractif, en choisissant la méthode la plus appropriée**, compte tenu des nombres en jeu et des outils disponibles (calcul réfléchi, utilisation d'un algorithme, d'un outil).

PROGRAMME DE L'ÉCOLE MATERNELLE [extraits]

Attendus en fin d'école maternelle :

- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.

PROGRAMME DES CYCLES 2 ET 3

Nombres et calculs [extraits relatifs au domaine additif]

CYCLE 2

Attendus de fin de cycle :

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

- Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée..., conduisant à utiliser les quatre opérations.
  – Sens des opérations.
  – Problèmes relevant des structures additives (addition / soustraction).
- Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques.
  – Sens des symboles +, – .

Calculer avec les nombres entiers

- Mémoriser des faits numériques et des procédures.
  – Tables de l'addition.
  – Décompositions additives de 10 et de 100, compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure, etc.
- Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
  – Addition, soustraction.
  – Propriétés implicites des opérations : 2 + 9, c'est pareil que 9 + 2.
  – Propriétés de la numération : « 50 + 80, c'est 5 dizaines + 8 dizaines, c'est 13 dizaines, c'est 130 ».
- Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.
- Calcul en ligne : calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.
- Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction.

CYCLE 3

Attendus de fin de cycle :

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

- Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.
  – Sens des opérations.
  – Problèmes relevant :
  – des structures additives ; […]

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

- Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul.
- Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
  – Addition, soustraction
  – Propriétés des opérations : 2 + 9 = 9 + 2
  – Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs.
  – Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant.
  – Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).
- Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.
- Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.
  – Règles d'usage des parenthèses.
- Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction […]
  –Techniques opératoires de calcul […].
- Calcul instrumenté : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
  – Fonctions de base d'une calculatrice.

REPÈRES DE PROGRESSIVITÉ (extraits)

CYCLE 2

Au CP, les élèves commencent à résoudre des **problèmes additifs et soustractifs** (…). Au CE2, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes plus complexes, éventuellement à deux étapes, nécessitant par exemple l'exploration d'un tableau ou d'un graphique, ou l'élaboration d'une stratégie de résolution originale.
Le réinvestissement dans de nombreux problèmes arithmétiques élémentaires permet ensuite aux élèves d'accéder à différentes compréhensions de chaque opération.

En ce qui concerne le **calcul**, les élèves établissent puis doivent progressivement mémoriser :
– des faits numériques : décompositions/recompositions additives dès le début de cycle (dont les tables d'addition) […].
– des procédures de calculs élémentaires.
Ils s'appuient sur ces connaissances pour développer des procédures de calcul adaptées aux nombres en jeu pour les additions au CP, pour les soustractions […].

Les opérations posées permettent l'obtention de résultats notamment lorsque le calcul mental ou écrit en ligne atteint ses limites. Leur apprentissage est aussi un moyen de renforcer la compréhension du système décimal de position et de consolider la mémorisation des relations numériques élémentaires. Il a donc lieu lorsque les élèves se sont appropriés des stratégies de calcul basées sur des décompositions/recompositions liées à la numération décimale, souvent utilisées également en calcul mental ou écrit.
Au **CP**, les élèves apprennent à poser les additions en colonnes avec des nombres de deux chiffres.
Au **CE1**, ils consolident la maîtrise de l'addition avec des nombres plus grands et avec des nombres de taille différente ; ils apprennent une technique de calcul posé pour la soustraction.
Au **CE2**, ils consolident la maîtrise de la soustraction […]. Le choix de ces techniques est laissé aux équipes d'école, il doit être suivi au cycle 3.

CYCLE 3

Le calcul : La pratique du calcul mental s'étend progressivement des nombres entiers aux nombres décimaux, et les procédures à mobiliser se complexifient.
Les différentes techniques opératoires portent sur des nombres entiers et/ou des nombres décimaux :
– addition et soustraction pour les nombres décimaux dès le CM1 […].

La résolution de problèmes : La progressivité sur la résolution de problèmes, outre la structure mathématique du problème, repose notamment sur :
– les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux ;
– le nombre d'étapes de calcul et la détermination ou non de ces étapes par les élèves selon les cas, à tous les niveaux du cycle 3, on passe de problèmes dont la solution engage une démarche à une ou plusieurs étapes indiquées dans l'énoncé à des problèmes, en 6ᵉ nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche ;
– les supports envisagés pour la prise d'informations : la collecte des informations utiles peut se faire à partir d'un support unique en CM1 (texte ou tableau ou représentation graphique) puis à partir de deux supports complémentaires pour aller vers des tâches complexes mêlant plusieurs supports en 6ᵉ.
La communication de la démarche et des résultats prend différentes formes et s'enrichit au cours du cycle.
Dès le début du cycle, les problèmes proposés relèvent des quatre opérations, l'objectif est d'automatiser la reconnaissance de l'opération en fin de cycle 3.

I- Typologie de problèmes d'addition et de soustraction

De nombreux problèmes supposent le recours à plusieurs opérations : pour être résolus, ils doivent être décomposés en « **sous-problèmes** » que l'on peut résoudre à l'aide d'une opération. L'addition et la soustraction ne pose pas plus de difficultés pour les nombres décimaux du point de vue de la résolution de problèmes, on va se concentrer sur les cas où les nombres sont des entiers naturels.
NB : la difficulté d'un problème ne vient pas de l'opération en jeu. C'est du côté de la **structure des problèmes** qu'il faut chercher les principales causes des difficultés, c'est-à-dire du côté des **relations** entre les éléments de la situation

1) Classification des problèmes

4 catégories (G. Vergnaud) :

Dans les schémas proposés ci-après :
□ représente un état : entier naturel ou décimal positif qui exprime une quantité, une mesure ou une position sur une graduation.
○ représente un nombre entier ou décimal, positif ou négatif qui exprime la valeur d'une transformation ou d'une relation.
} représente la composition des deux états.
→ représente une transformation (changement d'état).
| représente une relation (comparaison) entre états.

Catégorie 1 Composition de deux états

□
□ } □

□ peut évoquer une quantité discrète (nombre d'objets) ou une mesure (longueur, masse...).

Exemples de problèmes			
1.1	□ □ } □ ? recherche du composé	• Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?	8 7 } □ ?
1.2	□ ? □ } □ recherche d'une partie	• Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ? • Un pot rempli de liquide pèse 2,450 kg. Vide, il pèse 0,585 kg. Quelle est la masse du liquide qu'il contient ?	8 □ ? } 15 0,585 □ ? } 2,450

Catégorie 2 Transformation d'un état

□ $\xrightarrow{○}$ □

□ peut évoquer une quantité (nombre d'objets), une mesure (longueur, masse...) ou une position sur une piste graduée par des nombres entiers naturels ou décimaux.

○ peut évoquer une transformation positive ou négative.

Exemples de problèmes			
2.1	□ $\xrightarrow{○}$ □ ? recherche de l'état final	• Jacques avait 17 billes. Il en a gagné 5. Combien en a-t-il maintenant ? • Sophie joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 17. Elle doit reculer de 5 cases. Sur quelle case va-t-elle arriver ?	17 $\xrightarrow{+5}$ □ ? 17 $\xrightarrow{-5}$ □ ?
2.2	□ ? $\xrightarrow{○}$ □ recherche de l'état initial	• Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ? • Sophie joue au jeu de l'oie. Elle vient de reculer de 5 cases et se trouve sur la case 12. De quelle case est-elle partie ?	□ ? $\xrightarrow{+5}$ 22 □ ? $\xrightarrow{-5}$ 12
2.3	□ $\xrightarrow{○ ?}$ □ recherche de la transformation	• Jacques avait 17 billes avant de jouer cette partie. Il en a 22 à la fin de la partie. Combien en a-t-il gagné ? • Sophie joue au jeu de l'oie. Elle était sur la case 17 et elle se trouve maintenant sur la case 12. De combien de cases a-t-elle reculé ?	17 $\xrightarrow{○ ?}$ 22 17 $\xrightarrow{○ ?}$ 12

Catégorie 3 Comparaison d'états

□
| ○
□

□ peut évoquer une quantité (nombre d'objets), une mesure (longueur, masse...) ou une position sur une piste graduée par des nombres entiers naturels ou décimaux.

○ peut évoquer une comparaison positive (plus que..., plus loin que...) ou négative (moins que..., moins loin que...).

Exemples de problèmes			
3.1	□ | ○ □ ? recherche de l'un des états	• Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus (ou de moins) que Charles. Combien Charles en a-t-il ?	25 | +5 (ou −5) □ ?
3.2	□ | ○ ? □ recherche de la « comparaison »	• Dans un magasin un jouet vaut 9,45 €. Il vaut 6,60 € dans un autre magasin. De combien est-il moins cher dans le 2e magasin ?	9,45 | ○ ? 6,60

Catégorie 4 Composition de transformations

○ peut évoquer une transformation positive ou négative.

Exemples de problèmes La gamme des problèmes est très importante, compte tenu des combinaisons possibles de transformations positives ou négatives.			
4.1	○ → ○ → ○ ? recherche de la transformation composée	• Gérard a joué deux parties de billes. À la première partie, il gagne 7 billes et à la deuxième il en gagne 8. Combien en a-t-il gagné au total ?	+7 → +8 → ○ ?
		• Isidore a joué deux parties de billes. À la première partie, il gagne 7 billes et à la deuxième il en perd 12. Au total, a-t-il gagné ou perdu des billes ? Et combien ?	+7 → −12 → ○ ?
4.2	○ ? → ○ → ○	• Au jeu de l'oie, Julie joue deux coups. Au deuxième coup, elle avance de 9 cases. Au total, elle s'aperçoit qu'elle a reculé de 4 cases. Que s'était-il passé au premier coup ?	○ ? → +9 → −4
	○ → ○ ? → ○ recherche de l'une des composantes	• Aujourd'hui je sais que j'ai dépensé 30,65 €. Ce matin, j'ai dépensé 19 €. Combien ai-je dépensé cet après-midi ?	−19 → ○ ? → −30,65

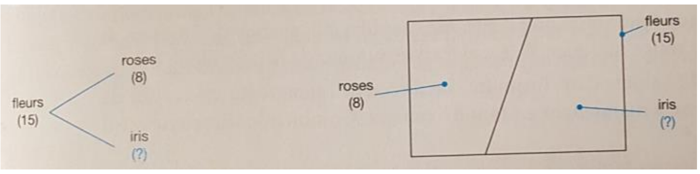
2) Importance de la place de l'inconnue dans la structure relationnelle

La **place de la valeur de l'inconnue** (celle qui est à chercher) modifie la difficulté d'un problème.
Ex : pour la catégorie 2, les problèmes de type 2.1 sont plus faciles à résoudre que les problèmes de type 2.2 ou 2.3.

La **valeur du tout** dans un problème de composition d'états est reliée très tôt à l'addition, mais pour la reconnaissance de l'opération (addition ou soustraction) qui permet de résoudre les autres problèmes, elle s'élabore progressivement.

3) Autres schématisations possibles

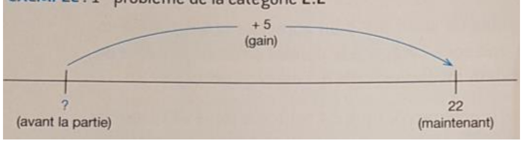
Les schématisations utilisées au 1.1 sont utiles pour l'enseignant, mais ne font pas l'objet d'un enseignement. D'autres sont parfois utilisées en classe comme :



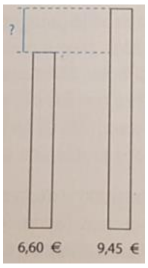
Arbres ou diagrammes. Ce type de schémas convient pour la catégorie 1.
Ex (problème 1.1) :

Droite numérique orientée

EXEMPLE : 1er problème de la catégorie 2.2



Bâtons (problème 3.2).



Il ne faut pas imposer aux élèves un type de schématisation, mais le PE peut proposer tel ou tel schéma et observer l'utilisation qu'en font les élèves. Il est préférable de laisser les élèves utiliser leurs propres représentations (dessins ou schémas).

II- Procédures de résolution, variables didactiques et difficultés

1) Procédures de résolution utilisables par les élèves

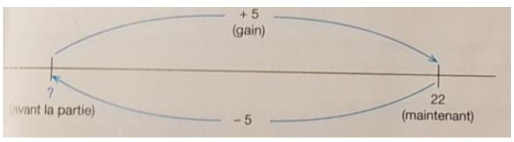
Ces procédures et raisonnements dépendent à la fois de **l'interprétation** que l'élève fait de la situation, des **procédures expertes de résolution** qu'il connaît pour certains types de problèmes et de la **taille des nombres** (ou de la **taille de l'écart entre les nombres donnés**) qui sont des variables didactiques décisives.

3 types de procédures :

- **Procédures s'appuyant sur une figuration de la réalité et sur un dénombrement** : les objets évoqués dans l'énoncé sont représentés par d'autres objets (doigts ou cubes par exemple), par des dessins ou des schémas. L'élève peut alors utiliser le dénombrement pour élaborer sa réponse (subitizing, comptage un par un etc).
  Ex : « dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ? » -> l'élève peut dessiner 15 croix, puis entourer 8 de ces croix (les roses), puis dénombrer le nombre de croix non entourées (iris).
- **Procédures utilisant le comptage en avant ou en arrière :** comptage en avant (surcomptage) ou en arrière (décomptage) de un en un (éventuellement aidé par les doigts) ou d'autres formes (sauts successifs de 10 en 10, de 20 en 20…). Cette procédure peut être faite de façon purement mentale (si les nombres sont « petits ») ou prendre appui sur des traces écrites (droite numérique par exemple).
  Ex : « Sophie joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 17. Elle doit reculer de 5 cases. Sur quelle case va-t-elle arriver ? » -> L'élève peut écrire la suite des 17 premiers nombres et barrer progressivement les 5 derniers nombres. / Il peut aussi reculer mentalement de 5 dans cette suite des nombres (16, 15, 14…).
- **Procédures utilisant un calcul sur les nombres, après reconnaissance du calcul à effectuer :** l'élève a recours à une traduction mathématique de la situation avant d'effectuer les calculs nécessaires.
  Ex : « Bernard possède 25 voitures. Il en a 5 de plus que Charles. Combien en a Charles ? » -> l'élève traduit la situation par 25 = … + 5 ou par 25 – 5 = …

Raisonnement et élaboration de procédures : L'élève doit mettre en œuvre un raisonnement basé sur les données de la situation.
Ex : « Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ? » -> l'élève reconnait, après un long apprentissage, qu'il faut calculer 22-5. Il dispose alors, pour tous les problèmes de ce type, d'un « **schéma général de procédure** » (ou « schéma de solution ») qui lui évite tout le raisonnement. Cependant, auparavant, comment peut-il trouver la bonne opération à faire pour résoudre un tel problème, alors qu'il ne dispose pas encore d'un schéma de solution ? Il y a plusieurs types de raisonnements ou schémas :

- **Raisonner en s'appuyant sur le contexte évoqué :** « *Jacques a gagné des billes, avant il en avait moins, donc je fais une soustraction ».* L'élève transforme le problème posé pour le ramener à un type de problème qu'il sait résoudre.
- **Faire un schéma intermédiaire :**
  Ce schéma suggère qu'il faut reculer (donc soustraire).



- **Traduire l'énoncé par une équation :** *5 + … = 22 ou 22 – 5 = …*
- **Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la réponse** : « *j'essaie 12, il en aurait maintenant 17, alors ça ne va pas, c'est trop petit ».*

Donc, l'élève doit mener un travail intellectuel pour résoudre un problème « anodin » pour un expert. L'enseignement doit aider l'élève à s'approprier des procédures expertes.

2) Variables didactiques et difficultés rencontrées par les élèves

Variables didactiques :

- **La taille des nombres, la taille de leur écart**. *Ex : « Il y a x cubes dans cette boîte, j'en enlève y. Combien y a-t-il maintenant de cubes dans la boîte ? »*

Valeurs de x et de y	Types de procédures
x et y « petits » $x=5, y=2$ $x=25, y=10$	Toutes les procédures sont possibles, y compris le dessin de chaque objet. Le calcul, s'il est reconnu par l'élève, peut être traité mentalement.
x « grand », y « petit » $x=93, y=5$	Le dessin devient difficile, mais les procédures de type comptage en arrière de 5 à partir de 92 (aidé éventuellement par les doigts) ou soustraction de 3 ($93-3=90$) puis de 2 ($9-2=88$) sont faciles à mettre en œuvre.
x et y très voisins $x=98, y=95$	L'élève peut être incité à transformer le problème posé en $95+...=98$ et procéder par calcul mental ou par comptage en avant à partir de 96.
x et y « grands » et non voisins $x=124, y=56$	Le recours au calcul apparaît nécessaire : – calcul réfléchi (ex. : l'élève enlève successivement 10, 10, 10, 10 et 10 puis 6 en s'aidant éventuellement d'une droite numérique) – calcul posé ou utilisation de la calculatrice.

- **La configuration des nombres** :
  - **Les nombres « ronds »** : calculs plus faciles et favorisent le recours à des procédures utilisant ces calculs.
  - **Les nombres décimaux** : calculs plus difficiles (surtout soustraction).

- **La mise à disposition ou non d'outils pour le calcul** : calculatrice permet à l'élève d'utiliser des procédures qu'il reconnait comme pertinentes, même s'il n'est pas capable de les exécuter lui-même.

Difficultés rencontrées par les élèves :

- **Structure relationnelle du problème et place de l'inconnue dans cette structure**. Ainsi les problèmes de la catégorie 4 sont difficiles car les élèves doivent raisonner sur des transformations sans pouvoir prendre appui sur les états (ex : positions du pions) qui sont inconnues.
- **Difficultés des calculs** : difficulté liée à la **taille** et à la **nature des nombres** : naturels ou décimaux. Elle dépend de l'âge des élèves : beaucoup hésitent à mettre en œuvre une procédure qui nécessite des calculs qu'ils maîtrisent mal.
- **Ordre d'apparition des données dans le texte** : si cet ordre ne correspond pas à la chronologie de l'histoire évoquée ou s'il ne correspond pas à l'ordre d'utilisation exigé par la résolution, des difficultés peuvent apparaitre.
- **Présence de mots souvent inducteurs d'une opération déterminée** : ex énoncé du 2.2, le mot « gagné » est inducteur de l'addition alors qu'une résolution experte passe par la soustraction.
  « Plus, total, augmente » inducteurs de l'addition / « moins, différence, perd, reste » inducteurs de la soustraction.

III- **Langage** relatif à l'addition et à la soustraction et ses difficultés

Pour exprimer des calculs et des résultats relatifs à l'addition et à la soustraction, les élèves doivent s'approprier des **symboles** et des **expressions verbales**.

1) Le symbolisme

Il est réduit aux **signes + et -**, mais il peut être source de plusieurs **difficultés** d'ordre sémantique et d'ordre syntaxique.

Au niveau sémantique : des écritures comme 58 + 23 ou 58 – 23 peuvent être associées à diverses catégories de problèmes. La difficulté vient du fait que **a+b et a-b sont, pour certains élèves, liés seulement à des problèmes d'augmentation ou de diminution.** Cela rend la **compréhension difficile** pour certains problèmes comme comprendre que 58+23 permet de trouver ce que possédait un individu qui vient de dépenser 23€ et à qui il reste 58€. Cette difficulté est renforcée par le fait que le **signe + se lit « plus »** et le **signe – « moins ».** Pour surmonter cette difficulté, il faut présenter de **nombreuses catégories de problèmes** qui peuvent être résolues par chacune de ces opérations.

Au niveau syntaxique :
- **Pour la soustraction** : comprendre que seule **l'écriture** 58 – 23 est possible, alors que pour **l'addition**, les **deux écritures** 58 + 23 et 23 + 58 sont possibles (et égales) est compliqué.
- Pour les deux opérations : les **écritures lacunaires** du type 3 + … = 15 ou … - 8 = 5, conduisent aux réponses 18 et 3, car l'élève considère que la présence des signes + et – indiquent qu'il faut additionner ou soustraire les deux nombres donnés.

2) Les expressions verbales

- Pour **l'addition** : les termes « **plus** », « **addition** », « **somme** » sont à connaître. Le mot « plus » correspond à une lecture linéaire « trois plus deux égal cinq » / le mot « somme » désigne le résultat de l'addition « 5 est la somme de 3 et de 2 » / le mot « addition » désigne l'opération.

- Pour la **soustraction** : les termes « **moins** », « **soustraction** » et « **différence** » sont à connaître. Le mot « moins » correspond à une écriture linéaire « sept moins trois égal quatre » / le mot « différence » désigne le résultat de la soustraction « 4 est la différence de 7 et de 3 » / le mot « soustraction » désigne l'opération.

IV- Calcul de sommes et de différences

1) Le répertoire additif (les tables d'addition)

Mémorisation du répertoire additif : disposer en **mémoire à long terme des résultats des tables** ou de **méthodes** permettant de les fabriquer instantanément est indispensable pour **alléger la charge de travail** et **diminuer les risques de surcharge cognitive.** Ceci est vrai pour le calcul d'une opération posée (qui peut être ralenti si ces résultats doivent être retrouvés) que pour la mise en œuvre d'un calcul réfléchi (manque de points d'appui). Cette mémorisation se fait sur une longue période, avec beaucoup d'étapes, et est **assurée qu'en début de CE2**, en général.

La maîtrise du répertoire additif suppose de connaître l'équivalence de certains résultats. *Ex : 7+5 = 12 implique que 12-7 = 5.*
Les résultats du répertoire doivent être mis en relation pour être plus facilement mémorisés :
- La mémorisation est facilitée par la **compréhension de ce qui est à mémoriser** et par **l'intérêt** que l'on perçoit pour l'acte de mémoriser.
- Il est plus facile de **mémoriser un ensemble structuré de résultats** que des résultats isolés -> il faut une mise en relation des résultats. *Ex : si je connais 7+7, je peux trouver facilement 7+8.*

Apprentissage du répertoire additif : repose sur 5 points d'appui importants.
- **L'ajout ou le retrait de 1 ou de 2 à un nombre inférieur ou égal à 10** (ex : 8-2, 7+1),
- La connaissance des **doubles**,
- La connaissance des **décompositions** faisant intervenir le **nombre 5** (ex : 8 c'est 5 +3),
- Les **compléments à 10** (ex : de 7 à 10, il y a 3),
- La **commutativité de l'addition** (si 8+3 = 11 est connu, 3+8 = 11 l'est aussi).

2) Le calcul posé

Pour assimiler les techniques opératoires du calcul posé, il faut bien comprendre la **numération décimale** (ex : équivalence entre 1 dizaine et 10 unités, 1 centaine et 10 dizaines …). Sinon, la compréhension de l'utilisation des retenues pour l'addition et pour la soustraction est gênée.
NB : Les connaissances sur la numération décimale sont aussi utiles pour le calcul réfléchi : savoir repérer rapidement les dizaines permet de les ajouter directement entre elles par exemple.

<u>L'addition posée de nombres entiers</u> : pas de difficulté importante. Seule difficulté est sur les retenues qui peuvent être source d'erreurs.

<u>La soustraction posée de nombres entiers</u> : propriétés plutôt complexes qui diffèrent selon la technique choisie. 3 **techniques** peuvent être enseignées à l'école (ex avec le calcul de 742 – 56) :

Méthode « par emprunt » ou « par cassage de la dizaine, de la centaine… »	Méthode « par complément »	Méthode « traditionnelle »
6 11 ~~7~~ ~~2~~ 14 − 5 6 6 6 8	7 2 4 − 5 6 1 1 + 6 6 8	7 12 14 − 5 6 1 1 6 6 8
Comme pour les unités on ne peut pas soustraire 6 de 4, on « casse » une des 2 dizaines pour en faire 10 unités.	On remplace le calcul de 724 – 56 par celui de 56 + … = 724.	Comme pour les unités on ne peut pas soustraire 6 de 4, on ajoute simultanément 10 unités au 1er terme et 1 dizaine au 2e terme…
Connaissances sous jacentes : – repérage des chiffres de chaque nombre ; – équivalence entre 1 millier et 10 centaines, 1 centaine et 10 dizaines… ; – connaissances des différences entre nombres inférieurs à 20 et nombres inférieurs à 10.	**Connaissances sous-jacentes :** – repérage des chiffres (unités, dizaines, centaines…) de chaque nombre ; – équivalence entre $a - b = …$ et $b + = a$; – connaissances des compléments des nombres inférieurs à 10 aux nombres inférieurs à 20.	**Connaissances sous-jacentes :** – repérage des chiffres (unités, dizaines, centaines,…) de chaque nombre ; – propriété de la soustraction selon laquelle, en ajoutant un même nombre aux deux termes d'une différence, on obtient une différence égale à la première ; – connaissances des différences entre des nombres inférieurs à 20 et des nombres inférieurs à 10.

De plus, la **conception de « 0 » comme « rien »** conduit parfois à des erreurs. *Ex : 407 – 182 = 385, l'élève estime ne pas pouvoir soustraire 8 de « rien » alors il recopie le 8.*

<u>L'addition et la soustraction de nombres décimaux</u> :

- Ex : 7,24 – 4,3. Certains élèves **positionnent les nombres décimaux « à partir de la droite »** (comme pour les nombres naturels), sans prendre en compte la virgule, donc ils vont aligner le 4 avec le 3. Idem pour l'addition posée de décimaux, ou si l'un des deux nombres est entier.

  7,2 4
  − 4,3
  6,8 1

- D'autres élèves posent bien l'opération, mais **n'imaginent pas les « 0 » non écrits** et reproduisent simplement 3 et 4 dans le résultat.

  1 3 4,7
  − 5 2,8 3 4
  8 1,9 3 4

3) Le calcul mental réfléchi

<u>Mise en jeu des propriétés des opérations sous-jacentes</u> : les propriétés des opérations amènent les techniques du calcul posé mais aussi les choix et la mise en œuvre des procédures de calcul réfléchi.

- **Calcul de 75-67** : pour effectuer ce calcul, il est possible de :
  - **Remplacer ce calcul par celui du complément de 67 à 75** : pour cela il faut savoir que ces deux calculs (différence et complément) sont équivalents.
  - **Enlever d'abord 70, puis ajouter 3** : pour cela il faut avoir repéré que soustraire une différence revient à soustraire le 1er terme puis ajouter le second ce qui peut s'écrire : a- (b-c) = (a-b) + c. L'élève se dit « j'ai enlevé 3 de trop, il faut maintenant que je les rajoute ».
  - **Remplacer ce calcul par celui de 78-70 en ajoutant simultanément 3 à chacun des termes de la différence.** Pour cela il faut savoir qu'on obtient une différence égale en ajoutant un même nombre aux deux termes de la différence initiale.

Choix d'une procédure de calcul réfléchi : ce choix est conditionné par les **relations connues et mémorisées entre certains nombres**. Ex : décider de calculer 42 + 38 par addition séparée des dizaines et des unités est facilitée par le repérage du fait que « 2 + 8 vont bien ensemble ». Des difficultés peuvent apparaître si l'élève ne sait pas que :

- **Certains nombres facilitent les calculs** (ex : nombres dont la somme est un nombre « rond »),
- **Pour ajouter 19, il est souvent commode d'ajouter 20, puis d'enlever 1** …

Cependant, ces méthodes doivent être présentées avec prudence car il existe d'autres procédés tout aussi fiables.

Difficultés récurrentes : reposent sur des **conceptions erronées** que les élèves se sont construites à propos des nombres. Ex : écriture à virgule qui représenterait l'adjonction de deux nombres entiers.