Chapitre 11 – Multiplication et division

Amorcées au cycle 2, les compétences concernant la multiplication et la division sur les nombres entiers naturels se construisent principalement au **cycle 3**. Elles sont ensuite étendues au cas du produit et du quotient d'un nombre décimal par un nombre entier, et du produit de deux nombres décimaux en fin de cycle 3. Elles sont ensuite généralisées aux nombres décimaux et aux fractions au cycle 4. Les compétences sont de 2 types :

- **Être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations**, d'abord par des **procédures personnelles** puis en utilisant les **procédures expertes**.
- **Être capable de produire le résultat d'un calcul,** en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des nombres en jeu et des outils disponibles (calcul réfléchi, algorithme etc).

PROGRAMME DES CYCLES 2 ET 3

Nombres et calculs [extraits relatifs au domaine multiplicatif][2]

CYCLE 2

Attendus de fin de cycle :

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

- Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée…, conduisant à utiliser les quatre opérations.
  – Sens des opérations.
  – Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division).
- Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques.
  – Sens des symboles ×, : .

Calculer avec les nombres entiers

- Mémoriser des faits numériques et des procédures.
  – Tables de multiplication.
  – Décompositions multiplicatives de 10 et de 100, multiplication par une puissance de 10, doubles et moitiés des nombres d'usage courant, etc.
- Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
  – […] multiplication, division.
  – Propriétés implicites des opérations : « 3 × 5 × 2, c'est pareil que 3 × 10 ».
  – Propriétés de la numération : « 4 × 60, c'est 4 × 6 dizaines, c'est 24 dizaines, c'est 240 ».
- **Calcul mental :** calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.
- **Calcul en ligne :** calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.
- **Calcul posé :** mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour la multiplication.

CYCLE 3

Attendus de fin de cycle :

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

- Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.
  – Sens des opérations.
  – Problèmes relevant :
  – […]
  – des structures multiplicatives.

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

- Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul.
- Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
  – Addition, soustraction, multiplication, division.
  – Propriétés des opérations :
  $3 \times 5 \times 2 = 3 \times 10$
  $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$
  – Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs.
  – Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant.
  – Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).
- **Calcul mental :** calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.
- **Calcul en ligne :** utiliser des parenthèses dans des situations très simples.
  – Règles d'usage des parenthèses.
- **Calcul posé :** mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour […] la multiplication, la division.
  –Techniques opératoires de calcul (dans le cas de la division, on se limite à diviser par un entier).
- **Calcul instrumenté :** utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
  – Fonctions de base d'une calculatrice.

REPÈRES DE PROGRESSIVITÉ (extraits)

CYCLE 2	CYCLE 3
Au CP, les élèves commencent à résoudre des **problèmes additifs et soustractifs** auxquels s'ajoutent des **problèmes multiplicatifs** dans la suite du cycle. L'étude de la **division**, travaillée au cycle 3, est initiée au cours du cycle 2 dans des situations simples de partage ou de groupement. Elle est ensuite préparée par la résolution de deux types de problèmes : ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur et ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs. Au CE2, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes plus complexes, éventuellement à deux étapes, nécessitant par exemple l'exploration d'un tableau ou d'un graphique, ou l'élaboration d'une stratégie de résolution originale. Le réinvestissement dans de nombreux problèmes arithmétiques élémentaires permet ensuite aux élèves d'accéder à différentes compréhensions de chaque opération. **En ce qui concerne le calcul**, les élèves établissent puis doivent progressivement mémoriser : – des faits numériques : décompositions/recompositions […] multiplicatives dans la suite du cycle[3] (dont les tables de multiplication) ; – des procédures de calculs élémentaires. Ils s'appuient sur ces connaissances pour développer des procédures de calcul adaptées aux nombres en jeu pour […] les multiplications au CE1 ainsi que pour obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne par un nombre à 1 chiffre et par des nombres comme 10, 25, 50, 100 en fin de cycle. Les **opérations posées** permettent l'obtention de résultats notamment lorsque le calcul mental ou écrit en ligne atteint ses limites. Leur apprentissage est aussi un moyen de renforcer la compréhension du système décimal de position et de consolider la mémorisation des relations numériques élémentaires. Il a donc lieu lorsque les élèves se sont appropriés des stratégies de calcul basées sur des décompositions/recompositions liées à la numération décimale, souvent utilisées également en calcul mental ou écrit. Au CE2, ils consolident la maîtrise de la **soustraction** ; ils apprennent une technique de calcul posé pour la **multiplication**, tout d'abord en multipliant un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre puis avec des nombres plus grands. Le choix de ces techniques est laissé aux équipes d'école, il doit être suivi au cycle 3.	**Le calcul :** La pratique du calcul mental s'étend progressivement des nombres entiers aux nombres décimaux, et les procédures à mobiliser se complexifient. **Les différentes techniques opératoires** portent sur des nombres entiers et/ou des nombres décimaux : – […] – multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2, de deux nombres décimaux en 6e ; – division euclidienne dès le début de cycle, division de deux nombres entiers avec quotient décimal, division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2. **La résolution de problèmes :** La progressivité sur la résolution de problèmes, outre la structure mathématique du problème, repose notamment sur : – les nombres mis en jeu : entiers (tout au long du cycle) puis décimaux ; – le nombre d'étapes de calcul et la détermination ou non de ces étapes par les élèves : selon les cas, à tous les niveaux du cycle 3, on passe de problèmes dont la solution engage une démarche à une ou plusieurs étapes indiquées dans l'énoncé à des problèmes, en 6e, nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche ; – les supports envisagés pour la prise d'informations : la collecte des informations utiles peut se faire à partir d'un support unique en CM1 (texte ou tableau ou représentation graphique) puis à partir de deux supports complémentaires pour aller vers des tâches complexes mêlant plusieurs supports en 6e. La communication de la démarche et des résultats prend différentes formes et s'enrichit au cours du cycle. Dès le début du cycle, les problèmes proposés relèvent des quatre opérations, l'objectif est d'automatiser la reconnaissance de l'opération en fin de cycle 3.

3 = « à partir du CE1 »

I- <u>Typologie des problèmes de multiplication et de division</u>

Certains problèmes supposent le recours à **plusieurs opérations** : pour être résolus, ils doivent être décomposés en « **sous-problèmes** » que l'on peut résoudre avec une opération.

<u>4 catégories de problèmes</u> (G. Vergnaud) :

Catégorie 1 Situations de proportion simple, avec présence de l'unité

Ces situations peuvent être représentées par un schéma fonctionnel du type :

1 → c
b → d

Les différents problèmes sont générés en plaçant l'inconnue en d, en c ou en b.

notion de
proportio
est déjà
ici alors
l'objet d'u
développ
plus appr
dans le c
suivant.

A. Problèmes de multiplication

1 → c
b → ?

Exemples de problèmes

1.A1 Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers de longueur 16. En partant de 0 j'ai avancé de 12 bonds. Quelle est la position d'arrivée ?

1.A2 J'ai collé 32 timbres sur chaque page d'un album de 14 pages. Combien y a-t-il de timbres dans l'album ?

1.A3 Dans une bande, j'ai découpé 12 rubans de 8 cm chacun. Quelle longueur de bande ai-je utilisée ?

1.A4 Je veux faire 12 paquets identiques de 28 bonbons chacun. Combien me faut-il de bonbons ?

- **Schéma du problème A1 :**

Nombre de bonds		Position d'arrivée
1	→	16
12	→	?

- **Modélisation de tous ces problèmes :**

$d = b \times c$ d étant l'inconnue.

B. Problèmes de division-partition ou de partage
(recherche de la « valeur d'une part »)

1 → ?
b → d

Exemples de problèmes

1.B1 Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 et en 12 bonds, le pion arrive à la position 192. Quelle est la valeur de chaque bond ?

1.B2 J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?

1.B3 Dans une bande de 100 cm, j'ai découpé 12 rubans de même longueur. Quelle est la longueur de chaque ruban ?

1.B4 Avec 354 bonbons je veux faire 12 paquets identiques. Combien y aura-t-il de bonbons dans chaque paquet ?

- **Schéma du problème B1 :**

Nombre de bonds		Position d'arrivée
1	→	?
12	→	192

La valeur de chaque bond est donnée par la position d'arrivée à l'issue du 1er bond.

- **Schéma du problème B4 :**

Nombre de paquets		Nombre de bonbons
1	→	?
12	→	(354)

354 est mis entre parenthèses, car on n'est pas certain que tous les bonbons seront utilisés.

- **Modélisation des problèmes B1, B2 et B4 :**

$d = (b \times c) + r$ avec $0 \leq r < b$ c étant le nombre cherché.
Tous les nombres sont des entiers naturels.

- **Modélisation du problème B3 :**

$d = b \times c$ c pouvant être un nombre décimal ou rationnel.

C. Problèmes de division-quotition ou de groupement
(recherche du « nombre de parts »)

1 → c
? → d

Exemples de problèmes

1.C1 Je déplace un pion sur une piste graduée, en partant de 0, par bonds réguliers de longueur 12. Je suis arrivé à la position 192. En combien de bonds ?

1.C2 J'ai collé 448 timbres dans un album. Il y a 14 timbres sur chaque page. Combien de pages ont été remplies ?

1.C3 Dans une bande de 100 cm, j'ai découpé des rubans de 12 cm. Combien de rubans ?

1.C4 Avec 354 bonbons je veux faire des paquets identiques de 12 bonbons. Combien y aura-t-il de paquets remplis ?

- **Schéma du problème C1 :**

Nombre de bonds		Position d'arrivée
1	→	12
?	→	192

- **Schéma du problème C4 :**

Nombre de paquets		Nombre de bonbons
1	→	12
?	→	(354)

354 est mis entre parenthèses, car on n'est pas certain que tous les bonbons seront utilisés.

- **Modélisation des problèmes C1, C2 et C4 :**

$d = (b \times c) + r$ avec $0 \leq r < c$ b étant le nombre cherché.
Tous les nombres sont des entiers naturels.

- **Modélisation du problème C3 :**

$d = b \times c$ b pouvant être un nombre décimal ou rationnel.

<u>Remarques sur la catégorie 1</u> :

- Les **nombres utilisés** sont situés soit dans un **contexte ordinal** (sauts réguliers sur une piste graduée ou évocation du comptage de n en n pour le problème A) ou dans un **contexte cardinal** (évocation d'objets isolés pour les problèmes B et D), ou dans un **contexte de mesure** (problème C).
- **Tous les problèmes sont formulés ici avec des nombres naturels** mais le résultat n'est pas toujours naturel (*cf B3).*

- **C'est le contexte qui impose ou non l'existence d'un reste nul ou non** ou que le résultat soit un nombre naturel. Ex : B1, B2 et C1, formulation laisse entendre que le reste est nul. Le **contexte** est donc une variable importante, qui permet de décider de l'utilisation de la **division euclidienne** (C4) ou de la **division décimale** ou résultat fractionnaire (C3).
- **Dans le cas de la division-quotition**, le problème revient à « partager un nombre par un autre » pour trouver le nombre de parts. Dans celui de la **division-partition,** le problème revient à « chercher combien de fois un nombre est contenu dans un autre » pour trouver la valeur de chaque part.

Catégorie 2 Situations de proportion simple, sans présence de l'unité

Ces situations peuvent être représentées par un schéma fonctionnel du type :

a → c
b → d

avec a et b différents de 1.
Les problèmes générés sont obtenus en plaçant l'inconnue en a, en d, en c ou en b.

Ces problèmes ne peuvent pas être résolus en faisant intervenir une seule opération (multiplication ou division). Ils relèvent de la proportionnalité, étudiée au chapitre 12.

➤ Typolog problèmes portionnal chap. 12 p

Catégorie 3 Situations de comparaison faisant intervenir des expressions du type « fois plus », « fois moins »

Ces situations peuvent être représentées par un schéma fonctionnel du type :

objet A a
↓ c fois plus ou c fois moins
objet B b

Les problèmes générés sont obtenus en plaçant l'inconnue en a en b ou en c.

Exemples de problèmes

3.1 Pierre a 7 ans. Son père est quatre fois plus âgé. Quel est son âge ?

3.2 Jean a fait un parcours en voiture de 360 km. André a parcouru 90 km. Combien de fois de plus qu'André Jean a-t-il parcouru de kilomètres ?

• **Schéma du problème 1 :**

Pierre 7 ans
↓ 4 fois plus âgé
Père de Pierre ?

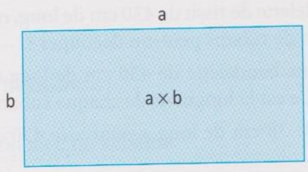
• **Schéma du problème 2 :**

Jean 360 km
↑ ? fois plus
André 90 km

Catégorie 4 Situations de produit de mesures

Il s'agit de situations qui peuvent être schématisées par un **tableau à double entrée** ou un **quadrillage rectangulaire régulier** (ou par un arbre) ou l'**aire d'un rectangle**.

	B_1	B_2	...
A_1			
A_2			
A_3			
...			



A. Problèmes de multiplication

Exemples de problèmes

4.A1 Quel est le nombre de carreaux sur une page de cahier quadrillé de 25 carreaux sur 60 carreaux ?

4.A2 Avec 3 sortes de figures (carré, triangle, rond) et 5 couleurs, combien peut-on réaliser de pièces différentes ?

4.A3 Quelle et l'aire d'un champ rectangulaire de 84 m sur 105 m ?

• **Schématisation pour le problème A2 :**

	carré	rond	triangle
Jaune			
Rouge			
Bleu			
Vert			
Blanc			

B. Problèmes de division

Exemples de problèmes	• Modélisation des problèmes par l'équation : $n = b \times x$
4.B1 Pour faire un quadrillage rectangulaire de 180 carreaux ayant 12 carreaux sur un côté, combien faut-il de carreaux sur l'autre côté ?	• Problème B1 : $n = 180$ $b = 12$ x = nombre cherché.
4.B1 bis J'ai 200 carreaux. Je veux réaliser un quadrillage rectangulaire le plus grand possible ayant 12 carreaux sur un côté. Combien y aura-t-il de carreaux sur l'autre côté ?	• Problème B2 : $n = 20$ $b = 12$ x = nombre cherché.
4.B2 Jean a 4 chemises différentes. Combien doit-il acheter de pantalons différents pour avoir 20 façons de s'habiller ?	• Problème B3 : $n = 256$ $b = 13$ x = nombre cherché.
4.B3 Un rectangle de 13 m de largeur a pour aire 256 m². Quelle est sa longueur ?	• *Problème B1 bis : la formulation laisse* ouverte la possibilité d'un reste non nul, la modélisation est alors du type : $n = (b \times x) + r$ avec $n = 200$ $b = 12$ x = nombre cherché r = reste éventuel.

II- Procédures de résolution utilisables pour les élèves

(Pour les nombres naturels). Ces procédures dépendent de **l'interprétation que l'élève fait de la situation**, des **procédures expertes de résolution qu'il connait** pour certains types de problèmes et de la **taille des nombres** (qui sont des variables didactiques décisives.

1) Pour résoudre les problèmes de « **multiplication** »

a) Problèmes de type « proportionnalité simple avec présence de l'unité »

Problème 1 : « Le directeur de l'école a acheté x boites de y crayons chacune. Combien a-t-il acheté de crayons ? » -> contexte familier. Il peut être schématisé par :

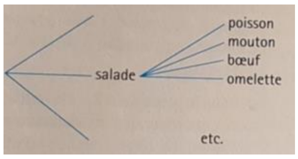
Nombres de boîtes	Nombre de crayons
1	y
x	?

Ce tableau permet de présenter les données de façon synthétique, mais il ne fournit pas de méthode de résolution. Le nombre 1 n'est pas explicitement donné dans l'énoncé, mais indiqué par le mot « chacune ».

Les **valeurs qui peuvent être données aux nombres x et y** sont **des variables didactiques** importantes qui vont influer sur l'efficacité des différentes procédures de résolution qui peuvent être utilisées par les élèves.

Cas 1 : y petit et x petit *Ex : y = 6 et x = 4*	Procédure utilisant le support d'un **dessin** ou d'un **schéma** *(représenter les 4 paquets de 6 crayons par des barres puis dénombrer les crayons un par un ou de six en six).*
	Procédure **additive** : *6 + 6 + 6 + 6 = 24 ou comptage de 6 en 6 (6 / 12 / 18 / 24).*
	Procédure **multiplicative** : *6x4 en calcul mental (tables de multiplication).*
Cas 2 : y assez grand et x petit *Ex : y = 48 et x = 6*	Procédures de type **additif** : efficaces si on sait calculer des nombres ayant 2 ou 3 chiffres. Le calcul additif peut devenir plus économique si l'élève pense à utiliser des regroupements de termes (ex : 48 + 48 = 96).
	Procédure **multiplicative** : efficace si on sait réaliser les calculs du type 48 x 6 ou si on dispose d'une calculatrice.
Cas 3 : y grand et x grand *Ex : y = 64 et x = 34*	Procédures de type **dessin** ou **schéma** : on ne peut pas résoudre totalement le problème avec.
	Procédures de type **additif** : difficiles mais les élèves peuvent trouver des moyens de calcul qui économisent le travail à effectuer (*ex : 64 + 64 = 128).* Ils peuvent utiliser les doubles, les produits par 10.
	Procédure **multiplicative** : procédure la plus efficace si on sait calculer des produits ou si on dispose d'une calculatrice.

b) <u>Problèmes de type « produit de mesures »</u>



<u>Problème 2</u> : « Combien de menus différents peuvent être composés avec 3 entrées et 4 plats principaux ? »

	poisson	mouton	bœuf	omelette
Salade				
Jambon				
Pâté				

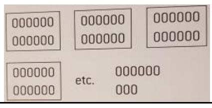
<u>Procédures possibles :</u>

- **Ecriture de tous les couples possibles** (il ne faut pas en oublier),
- Résolution par un schéma, avec un **arbre** par exemple,
- Résolution par un **tableau à double entrée,**
- Résolution par un **raisonnement** (*à chaque entrée on peut associer 4 plats donc 4 + 4 + 4 ou 4 x 3).*

2) <u>Pour résoudre les problèmes de « **division** »</u>

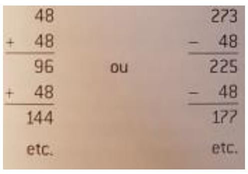
<u>Problème 3</u> : « On range 273 œufs dans des boites de 12. Combien de boites peut-on remplir ? »

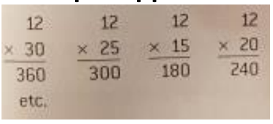
Certaines des procédures qui vont suivre sont adaptées pour les problèmes de type « quotition » (comme l'exemple au-dessus) mais pas pour les problèmes de type « partition » (procédures imagées, et procédures progressives).

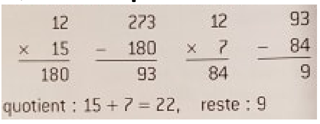
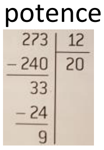
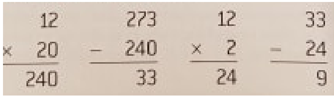
<table>
<tr><td rowspan="2">Procédures imagées</td><td>Dessin figuratif : l'élève essaie de simuler l'action évoquée par la situation avec un dessin plus ou moins schématisé.

</td><td rowspan="2">Ces procédures sont peu économiques et difficiles à gérer dès que les nombres sont grands.
Il s'agit parfois de procédures d'entrée dans le problème qui permettent à l'élève de comprendre la situation et d'imaginer une autre procédure plus rapide.</td></tr>
<tr><td>Dessin schématisé : l'élève doit contrôler qu'il ne dépasse par 273, en comptant de 12 en 12 ou en additionnant les « 12 » représentés.

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procédures progressives fondées sur l'addition ou la soustraction</td><td>Additions « pas à pas » : 12 + 12 = 24 + 12 = 36 + 12 = 48 etc. OU 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60 (x 2), 60 + 60 = 120 etc.
Il faut à la fin retrouver le nombre de fois où 12 a été additionné ou soustrait. La 1^{ère} suite d'égalités montre la démarche de l'élève qui simule le remplissage des boites une à une en faisant un bilan après chaque boite remplie. Mais usage du signe « = » incorrect.
La 2^{ème} suite de calculs est comparable à la 1^{ère} mais l'élève fait des bilans partiels du nombre d'œufs utilisés et réutilise ses calculs antérieurs.</td><td rowspan="3">Les 2 premières procédures très coûteuses avec des nombres assez grands. De plus, certains élèves, à la fin de leurs calculs ne savent plus comment trouver le nombre de boîtes (surcharge cognitive).

Toutes ces procédures sont des améliorations des procédures précédents : l'élève utilise souvent un résultat obtenu mentalement.

Elles sont efficaces quand l'élève a l'idée d'utiliser des multiples de 10 (et plus tard de 100), ce qui allège la charge de calcul.</td></tr>
<tr><td>Soustraction « pas à pas » : 273 – 12 = 261, 261 – 12 = 249 etc.
L'élève s'intéresse aux œufs restants à mettre en boites plutôt qu'aux œufs déjà utilisés (# additions pas à pas).</td></tr>
<tr><td>Additions ou soustractions de multiples du diviseur :

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Procédures multiplicatives
Résoudre une équation du type a x y = b</td><td colspan="2">Pose de la multiplication à trou : 12 x … = 273. Délicat si le reste n'est pas nul. Peut être une procédure d'entrée vers les procédures suivantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Essais de multiples successifs du diviseur : 12 x 10 = 120, 12 x 12 = 144, 12 x 11 = 132 etc.
Fastidieuse si l'élève commence son exploration « trop bas ». Elle est souvent abandonnée au profit de la suivante.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Essais par approches successives :


L'efficacité de cette procédure dépend de la qualité de l'approximation effectuée au départ et des ajustements successifs en fonction de l'écart du résultat obtenu avec le nombre cible (dividende). Elle conduit souvent à la réussite car elle est moins sensible que d'autres à la taille des nombres présents. Dans l'exemple, l'élève se rend compte que 360 est trop éloignée de 273, il essaie donc avec un nouveau multiplicateur (25) qui donne encore un résultat trop grand.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procédures mixtes
Utilisation de la multiplication et de la soustraction.</td><td>Quotients partiels « au hasard » :

</td><td rowspan="2">L'élève fait un essai de multiple (inférieur au dividende), calcule l'écart entre ce produit et le dividende, puis recommence avec l'écart. Il obtient ainsi une suite de quotients partiels qu'il doit ensuite additionner.
Ces procédures peuvent découcher sur une présentation traditionnelle « en potence » :

</td></tr>
<tr><td>Utilisation de multiples de 10, 100 … pour les quotients partiels :

</td></tr>
<tr><td>Utilisation de la division</td><td colspan="2">Calcul de la division de 273 par 12 ou utilisation de la calculatrice : l'élève a reconnu le modèle expert dont relève le problème posé.</td></tr>
</table>

Souvent, un élève utilise simultanément ou successivement plusieurs de ces procédures.

III- Principales variables didactiques et erreurs caractéristiques

1) Variables didactiques

Variables en lien avec la résolution de problèmes en général :

- **Familiarité avec le contexte**,
- **Manière dont l'énoncé est formulé** (ordre dans lequel sont fournies les données, place de la question, forme uniquement textuelle ou texte accompagné d'une image ou d'un dispositif expérimental …).

Variables pour les problèmes à résoudre par une multiplication ou une division (plusieurs facteurs influent sur la difficulté et sur les procédures) :

- **Type de problèmes :** ceux de « proportion simple » (avec présence de l'unité) sont, par exemple, souvent mieux réussis que les problèmes « produit de mesures ».
- **Types des nombres utilisés** : les nombres décimaux posent, dans les problèmes multiplicatifs, des difficultés particulières.
- **Taille des nombres en jeu** : rend possible ou non telle ou telle catégorie de procédures. Pour les problèmes de division, la taille du dividende et du diviseur rend plus ou moins coûteuse une résolution par recours à un « dessin » de la situation ou une résolution mentale, ou qu'un traitement par une suite d'additions ou de soustractions répétées.

- **Outils de calculs disponibles ou non** : ex, la calculatrice permet de laisser plus de liberté sur le choix de la procédure car elle permet de ne pas faire intervenir les compétences en calcul des élèves.

Variables pour les problèmes de « division » exclusivement :
- **Valeur du quotient :** plus ou moins facile selon s'il est composé d'un seul ou plusieurs chiffres (unités ou dizaines, centaines),
- **Existence ou non d'un reste nul :** rend les calculs plus ou moins interprétables,
- **Réponse à interpréter à partir d'un terme de la division :** la réponse peut être fournie par le quotient entier, le quotient augmenté de 1, par le reste, par le quotient et le reste.

2) Erreurs caractéristiques

Problèmes ne faisant intervenir que des **nombres entiers :**
- **Erreurs dans le choix de la procédure de résolution** : peuvent être influencées par les **termes de l'énoncé** ou par un **contexte** qui a souvent été utilisé pour une autre opération.
  Ex : « Olivier achète 6 objets qui valent chacun le même prix. Il paie 54€. Quel est le prix de chaque objet ? ». Le mot « chaque » est un indice utilisé par les élèves pour identifier les problèmes de multiplication. Une erreur classique est donc de faire le calcul du produit 54 x 6.
- **Erreurs dans l'exécution de la procédure choisie ou dans l'interprétation des calculs effectués** : *cf problème 3 p 6.*
- **Erreurs dans le calcul** : *cf V.*

Problèmes faisant intervenir les **nombres décimaux** :
- Ex : *« Il achète un morceau de 0,756 kg de gruyère à 10,35€ le kg. Quel est le prix de ce morceau de gruyère ? »* : souvent l'élève **ne reconnait pas qu'il faut utiliser la multiplication** ou ne sait pas comment la faire. Cependant, il peut utiliser d'autres procédures comme chercher le prix d'un gramme, ou considérer que 0,756 kg c'est 0,7 kg + 0,05 kg + 0,006 kg et chercher le prix d'un dixième, d'un centième etc.
- Ex : *« Jeff achète 6 paquets d'enveloppe à 1,35€ le paquet. Quel est le prix des 6 paquets ? »*. Ici la multiplication est facilement reconnue.
- Ex : « *Sofia partage un ruban de 125 cm en 6 morceaux de même longueur. Quelle est la longueur de chaque morceau ? ».* Les nombres de l'énoncé sont entiers. La situation permet facilement d'évoquer la **division** mais la division euclidienne donne un quotient (20) et un reste (5) alors que le partage est possible. Certains élèves vont assimiler les deux parties ensemble : 20,5. Le recours au **quotient décimal** suppose qu'on transforme les 5 cm restants en 50 dixièmes de cm à partager en 6 etc. De plus, la **division ne « s'arrête pas »** et pose la question de la précision acceptée pour la réponse : les connaissances de l'élève sur la précision des instruments de mesure sont sollicitées.
- Ex : *« Bruno a payé 74€ pour l'achat de plusieurs paquets identiques de lessive à 9,25€ le paquet. Combien de paquets a-t-il achetés ? »*. Il faut que l'élève traduise l'énoncé en « combien de fois 9,25 est-il contenu dans 74 ? ». La **division de 74 par 9,25** présente des difficultés. Plusieurs procédures possibles pour des cycles 3 :
  - Additionner plusieurs fois 9,25 jusqu'à atteindre 74 et dénombrer le nombre de fois où 9,25 a été répété,
  - Essayer des produits de 9,25 par des nombres entiers avec une évaluation préalable de l'ordre de grandeur et ajuster les essais en fonction des résultats obtenus.

  En $6^{ème}$, ils apprendront qu'il suffit de faire 7400 divisé par 925.

IV- Langage et notations symboliques

Elles sont plus délicates pour la division et la multiplication que pour l'addition et la soustraction.

1) Pour la multiplication

Les expressions symboliques : pas de difficulté particulière si l'élève **donne du sens à une écriture comme 25 x 13**, c'est-à-dire qu'il la relie à des **additions répétées** (25 + 25 + 25… avec 13 termes ou 13 + 13 + 13 … avec 25 termes), ou à des catégories de problèmes. La difficulté principale vient de **l'interprétation de produits à plusieurs facteurs comme 3 x 6 x 4** (addition répétée complexe).

La lecture des expressions symboliques : source d'interrogations chez les enseignants. L'utilisation du mot « **fois** » suscite de nombreuses interrogations : 5 fois 3 doit-il être associé à 5 x 3 ou à 3 x 5 ? Le plus simple est de considérer qu'il peut être associé aux deux, puisque les deux sont égaux.

Les termes « multiplication », « produit » et « facteur » :
- Le terme « **produit** » est utilisé avec 2 significations : il désigne une **écriture** (4 x 5 est le produit de 4 par 5) et un **résultat** (20 est le produit de 4 et de 5).
- Le mot « **facteur** » utilisé comme « **terme de produit** » n'est pas indispensable à l'école primaire, mais il le deviendra au collège pour « facteur commun », « factorisation » etc.

2) Pour la division

Les expressions symboliques : présentent de nombreuses difficultés.
- La **division euclidienne fournit deux résultats** : le quotient entier et le reste, et aucune notation symbolique permet de les exprimer. Il faut utiliser l'égalité a = bq + r.
- Le **recours au signe « : »** est légitime pour écrire un quotient exact entier ou décimal (15 : 5 = 3) ou un quotient décimal approché (23 : 7 ≈ 3,29).
- Le **signe [÷] de la calculatrice** pose d'autres problèmes car selon les calculatrices, il fournit un arrondi ou une troncature du résultat.

Les termes « quotient », « reste », « dividende », « diviseur » : au cycle 3, on se limite aux termes « quotient » et « reste ». « Dividende » et « diviseur » peuvent être utilisés mais pas obligatoire. Cependant, il faut être conscient que l'usage, même correct, de ces termes n'en garantit pas la compréhension.

V- Calcul de multiplications et de divisions

1) Résultats et procédures de base

Ces connaissances commencent à se **mettre en place dès le cycle 2** et nécessitent un travail **régulier** sur l'ensemble du cycle 3, et ne sont le plus souvent **bien assurées qu'au début du CM2.**

Pour la **multiplication** et la **division**, les résultats et procédures de base concernent :
- La **connaissance des tables de multiplication** qui doit permettre, au terme de l'apprentissage, de donner instantanément tout produit de 2 nombres inférieurs à 10, ainsi que la réponse à des questions du type : combien de fois 8 dans 48 ? Combien de fois 8 dans 50 ? Quel est le quotient de 48 par 8 ?, et de proposer des décompositions d'un nombre sous forme de produits de deux facteurs.
- Le **calcul de produits dont un facteur est 0 ou 1**,
- Le **produit et le quotient d'un nombre naturel ou d'un nombre décimal par 10, 100,**
- Des **produits du type 30 x 4 ou 30 x 40** …

Pour cela, il faut tenir compte de la **répétition** pour mémoriser mais aussi :
- De la **mémorisation qui est facilitée par la compréhension** de ce qui est à mémoriser et par **l'intérêt** que l'on perçoit pour l'acte de mémoriser,
- Qu'il est plus facile de mémoriser un **ensemble structuré de résultats** que des résultats isolés. Pour cela, un travail doit être fait pour mettre en évidence :
  - La **commutativité de la multiplication** : si 3 fois 9 est connu, 9 fois 3 l'est aussi,
  - Les **particularités des tables** : dans la table de 4, les résultats vont de 4 en 4 …

- Les **relations entre résultats à mémoriser** : si je connais 6 x 6, je peux retrouver facilement 7 x 6 (c'est 6 de plus).

2) Propriétés des opérations

Une **connaissance en acte** (c'est-à-dire non nécessairement formalisée) **de quelques propriétés des opérations** et une **bonne maîtrise de la numération décimale** sont indispensables à la compréhension des techniques opératoires. Elle sous-tend également le choix et la mise en œuvre de la plupart des procédures de calcul réfléchi.

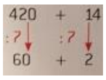
Calcul 1 : « Calculer le quotient de 434 par 7 ». Il faut penser à décomposer 434 de façon à obtenir des calculs faciles à réaliser (ex : 434 = 420 + 14, puis 420 divisé par 7, et 14 divisé par 7, et addition des deux quotients obtenus).

➔ Propriété : dans la division exacte d'une somme de deux nombres, le quotient est égal à la somme des deux quotients partiels.

Calcul 2 : « Calculer le quotient de 32 par 5 ». Il faut remplacer ce calcul par celui de 64 divisé par 10.

➔ Propriété : le quotient n'est pas modifié si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre.

Donc, **tout calcul réfléchi nécessite la mise en œuvre de propriétés des opérations**. Il peut être intéressant d'exprimer ces propriétés sur des cas particuliers, pour que les élèves en prennent conscience :

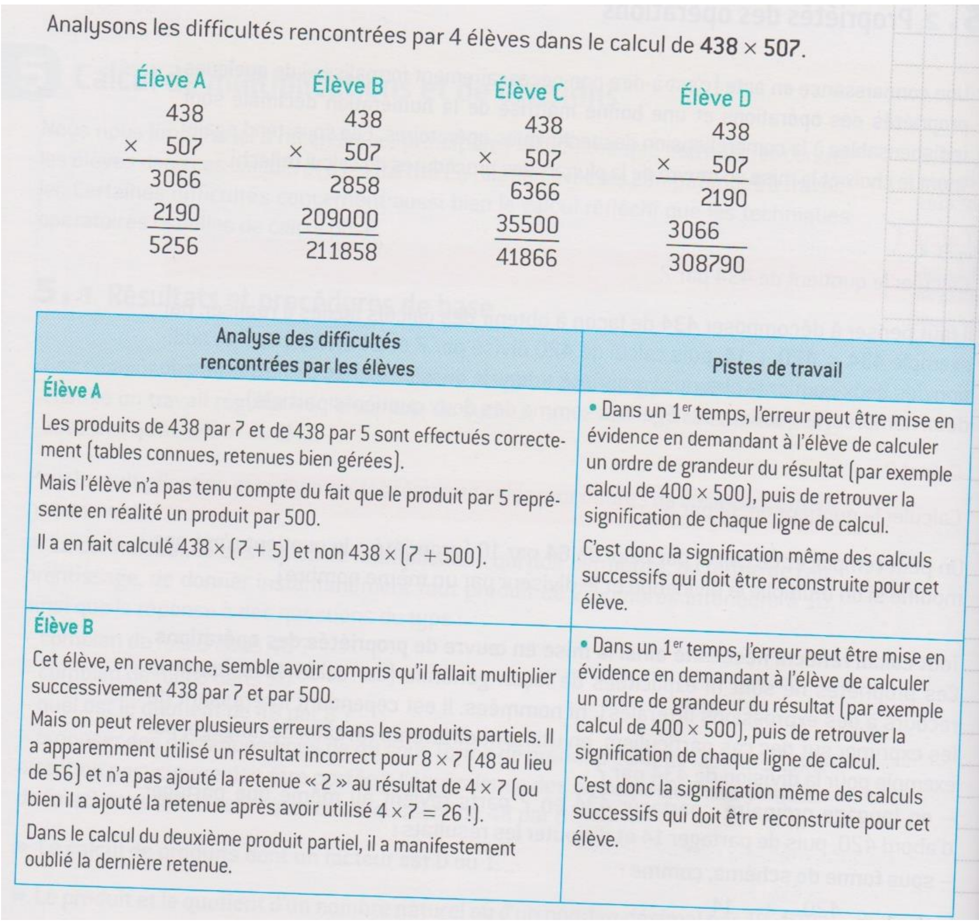
- **En langage ordinaire** : « partager 434 en 7 parts revient au même que partager d'abord 420 puis partager 14 et d'ajouter les résultats »,
- **Sous forme de schéma :** 

- **Sous forme d'écriture avec des parenthèses :** 434 : 7 = (420 + 14) : 7 = (420 : 7) + (14 : 7).

3) Technique opératoire de la **multiplication**

a) Difficultés rencontrées par les élèves dues :

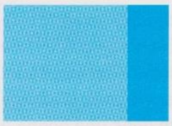
- A ce que **tous les résultats des tables ne sont pas parfaitement mémorisés**,
- A la gestion des « **retenues** »,
- A **l'ordre des calculs à respecter**,
- Au « **décalage** » qui correspond en fait à **l'existence d'un « 0 »**.



Analysons les difficultés rencontrées par 4 élèves dans le calcul de 438 × 507.

Élève A	Élève B	Élève C	Élève D
438	438	438	438
× 507	× 507	× 507	× 507
3066	2858	6366	2190
2190	209000	35500	3066
5256	211858	41866	308790

Analyse des difficultés rencontrées par les élèves	Pistes de travail
Élève A Les produits de 438 par 7 et de 438 par 5 sont effectués correctement (tables connues, retenues bien gérées). Mais l'élève n'a pas tenu compte du fait que le produit par 5 représente en réalité un produit par 500. Il a en fait calculé 438 × (7 + 5) et non 438 × (7 + 500).	• Dans un 1er temps, l'erreur peut être mise en évidence en demandant à l'élève de calculer un ordre de grandeur du résultat (par exemple calcul de 400 × 500), puis de retrouver la signification de chaque ligne de calcul. C'est donc la signification même des calculs successifs qui doit être reconstruite pour cet élève.
Élève B Cet élève, en revanche, semble avoir compris qu'il fallait multiplier successivement 438 par 7 et par 500. Mais on peut relever plusieurs erreurs dans les produits partiels. Il a apparemment utilisé un résultat incorrect pour 8 × 7 (48 au lieu de 56) et n'a pas ajouté la retenue « 2 » au résultat de 4 × 7 (ou bien il a ajouté la retenue après avoir utilisé 4 × 7 = 26 !). Dans le calcul du deuxième produit partiel, il a manifestement oublié la dernière retenue.	• Dans un 1er temps, l'erreur peut être mise en évidence en demandant à l'élève de calculer un ordre de grandeur du résultat (par exemple calcul de 400 × 500), puis de retrouver la signification de chaque ligne de calcul. C'est donc la signification même des calculs successifs qui doit être reconstruite pour cet élève.

Élève C La production de l'élève C est plus complexe à analyser. Il gère les retenues comme pour l'addition. Voici par exemple son calcul effectif pour 438 × 7 : $\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\,5} \\ 4\,3\,8 \\ \times\ 5\,0\,7 \\ \hline 6\,3\,6\,6 \end{array}$ Il a calculé 8 × 7 = 56 ; il pose 6 et retient 5 qu'il ajoute à 3 ; il obtient 8 ; il calcule alors 8 × 7 = 56 ; il pose 6 et retient 5 qu'il ajoute à 4 ; il obtient 9 ; il calcule alors 9 × 7 = 63. La même analyse peut être faite pour le deuxième produit partiel. D'autre part, il « oublie » un « 0 » dans le deuxième produit partiel : tout se passe comme s'il calculait 438 × (50 + 7). Il n'a pas tenu compte du « 0 » intercalé et n'a mis qu'un seul « 0 » comme il le fait lorsqu'il n'y a pas de « 0 » intercalé, ou bien (ce qui est moins probable) il a décomposé 507 en 50 + 7.	• Avec cet élève, il convient de retravailler l'ensemble des calculs à effectuer et leur signification : – comment multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un chiffre (sens et gestion des retenues, différences avec le cas de l'addition) ; – que signifie chaque produit partiel : faire la relation avec la décomposition du multiplicateur, soit ici : 507 = 7 + 500.
Élève D Cet élève connait les produits de la table. Il sait qu'il faut « décaler de 2 rangs » pour le deuxième produit partiel lorsqu'il y a un « 0 » intercalé. Mais il n'effectue pas les produits partiels dans le bon ordre. Il a d'abord calculé 438 × 5, puis 438 × 7. Il obtient en fait le résultat de 438 × 705. Il a commencé par le 1er chiffre qu'il a écrit lorsqu'il a inscrit 507 (le chiffre 5).	• Là aussi, il faut retravailler la signification des produits partiels, par exemple en représentant le calcul sous forme rectangulaire : 

b) Connaissances sous-jacentes à la technique de la multiplication

La construction progressive de la **technique usuelle de la multiplication posée** débute actuellement à la **fin du cycle 2** (multiplication par un nombre à un chiffre). Elle est mise en place de façon générale au CE2.

Les connaissances préalables nécessaires à cet apprentissage :
- Les **produits des tables de multiplication qui doivent être disponibles rapidement** : une bonne mémorisation est indispensable.
- La **décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base dix** doit être maitrisée (ex : 507 = 500 + 7).
- Le **repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre** (unités, dizaines …) est indispensable pour une bonne gestion des retenues.
- Les élèves doivent être capables de **remplacer un produit par une somme de produits** en utilisant « en acte » les propriétés :
    - De **distributivité de la multiplication sur l'addition** : 438 x 507 est égal à (437 x 7) + (437 x 500).
    - De **l'associativité de la multiplication** : 438 x 500 est égal à (438 x 5) x 100.
- Les élèves doivent **connaitre la règle des « 0 »** (comment multiplier par 10 ou par 100).

La **progression** envisagée est souvent du type :
- 1ère étape : multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre,
- 2ème étape : multiplication d'un nombre par un nombre du type 20, 300 …,
- 3ème étape : multiplication de deux nombres quelconques.

4) Technique opératoire de la **division euclidienne**

a) Difficultés rencontrées par les élèves

Difficile car :
- La **division posée est la seule opération pour laquelle les calculs s'effectuent en considérant le dividende « de gauche à droite »**.
- Cette technique exige **d'effectuer simultanément des divisions** (recherche de chaque chiffre du quotient), des **multiplications** (produit du diviseur par chaque chiffre du quotient) et des **soustractions**. Si on pose les soustractions partielles, la charge de travail de l'élève est allégée.
- **Si on ne pose pas les soustractions partielles, celles-ci peuvent faire intervenir des retenues supérieures à 1, ce qui est inhabituel pour les élèves**. Il ne faut donc pas refuser la pose des soustractions partielles.

Sans les soustractions partielles posées :

$\begin{array}{r|l} 7518 & 29 \\ \cline{2-2} 171 & 259 \\ 268 & \\ 7 & \end{array}$

Avec les soustractions partielles posées :

$\begin{array}{r|l} 7518 & 29 \\ \cline{2-2} -58 & 259 \\ \hline 171 & \\ -145 & \\ \hline 268 & \\ -261 & \\ \hline 7 & \end{array}$

@maitresse.jero

- Les **chiffres écrits successivement pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation** qui peut conduire à essayer un chiffre erroné donc provisoire. La division est la seule opération dans laquelle un chiffre « calculé » peut ne pas être définitif.

b) <u>Connaissances sous-jacentes à la technique de la division euclidienne</u>

La construction progressive de la technique usuelle de la **division posée débute actuellement en CE2** (le diviseur étant un nombre à un chiffre). Elle est mise en place de façon générale au CM1.

Les <u>connaissances préalables</u> nécessaires à cet apprentissage :
- Le **repérage de la valeur des chiffres** en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre.
- Les **tables de multiplication** pour donner rapidement des produits ou des quotients.
- Le **calcul approché** est nécessaire pour répondre à des questions du type « combien de fois 29 dans 75 ? »,
- Le **calcul des produits et de différences** doit être bien maîtrisé.

La <u>**progression**</u> envisagée est en général du type :
- 1ère étape : division d'un nombre entier par un nombre entier à un chiffre,
- 2ème étape : division d'un nombre entier par un nombre entier à plus d'un chiffre,
- 3ème étape : division décimale de deux nombres entiers,
- 4ème étape : division décimale d'un nombre décimal par un nombre entier.

VI- <u>Approche de la **notion de multiple**</u>

Cette notion est utilisée **dès l'école primaire**, surtout pour encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs d'un nombre donné.
La <u>progression</u> envisagée est en général du type :
- Au **CE2**, les **notions de double, de triple et de quadruple** sont enseignées en même temps que celles de moitié, de tiers et de quart, ce qui prépare à l'étude des fractions simples l'année suivante.
- Au **CM1**, l'élève est amené à reconnaître les **multiples de nombres d'usage courant** (5, 10, 15, 20, 25, 50), les **multiples de 2 (doubles) ayant déjà été étudiés depuis le CP**.

<u>**Procédures** utilisables pour reconnaitre si un nombre donné est un multiple d'un autre nombre n :</u>
- **Chercher s'il est dans la table de multiplication** « prolongée » de n :
  - En comptant de n en n à partir de 0 pour savoir si on passe par n,
  - En s'appuyant sur un multiple connu de n et en avançant de n en n.
- **Essayer des nombres k susceptibles de faire que le produit n x k soit égal au nombre donné**.
- **Diviser le nombre donné n** pour vérifier si on obtient un **reste nul ou non**.
- Utiliser une **propriété connue**. Ex : critère de divisibilité.

<u>Difficultés liées à :</u>
- Une **confusion entre multiple et multiplication** : l'élève calcule 24 x 3 quand on demande si 24 est multiple de 3,
- La **dissymétrie de l'expression « … est multiple de … »** : l'élève confond « 24 est multiple de 3 » et « 3 est multiple de 24 »,
- Une **extension de propriétés valables seulement pour certains nombres**.

<u>Problèmes envisageables à l'école primaire</u> :
- **Problèmes qui font appel seulement à la notion de multiple** : « *En avançant de 6 en 6 sur une piste graduée à partir de 0 avec les nombres entiers, passera-t-on par le repère associé au nombre 98 ?* » -> se demander si 98 est multiple de 6 ou non.
- **Problèmes qui font implicitement appel à la notion de multiple commun** : « *Une plaque rectangulaire mesure 48 cm sur 84 cm. On veut la recouvrir entièrement avec des carrés tous identiques dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelles sont toutes les solutions possibles ?* » -> utiliser des hypothèses sur *« 48 est multiple de … ? », « 84 est multiple de … ? ».*