Chapitre 12 – Proportionnalité

L'enseignement de la proportionnalité s'inscrit dans le cadre plus général de l'apprentissage du calcul et de l'organisation et de la gestion de données. Il ne peut pas être séparé de l'apprentissage du domaine multiplicatif.

Les compétences à acquérir concernent principalement la résolution de problèmes :

- **Reconnaître si une situation peut être mathématisée au moyen de la proportionnalité**,
- Être capable de **mettre en œuvre un mode de résolution adapté**, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu.

La proportionnalité peut être envisagée dans 3 cadres différents :

- Le **cadre des grandeurs** où les nombres expriment des quantités ou des mesures.
- Le **cadre numérique** où les nombres sont manipulés de manière abstraite, en référence à des propriétés connues relatives aux suites proportionnelles ou à la fonction linéaire,
- Le **cadre graphique** où des représentations graphiques sont utilisées.

A l'école primaire, elle est travaillée que dans le 1er cadre, c'est-à-dire dans des **situations évoquant des quantités d'objets ou des grandeurs** (prix, longueurs, masses, aires …).

PROGRAMME DU CYCLE 3 (extraits)
Nombres et calculs

Attendus de fin de cycle :

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul
Proportionnalité
- Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux
Proportionnalité
- Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs.
  – Graphiques représentant des variations entre deux grandeurs.[1]

Reconnaitre et utiliser quelques relations géométriques
Proportionnalité
- Reproduire une figure en respectant une échelle.
  – Agrandissement ou réduction d'une figure.

REPÈRES DE PROGRESSIVITÉ
Le cas particulier de la proportionnalité

La **proportionnalité** doit être traitée dans le cadre de chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie ».

En CM1, le recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples :
– « si j'ai deux fois, trois fois… plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois… plus d'ingrédients » ;
– « si 6 stylos coutent 10 euros et 3 stylos coutent 5 euros, alors 9 stylos coutent 15 euros ».
Les procédures du type passage par l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant et en fonction des nombres (entiers ou décimaux) choisis dans l'énoncé ou intervenant dans les calculs.

À partir du CM2, des situations impliquant des **échelles** ou des **vitesses constantes** peuvent être rencontrées. Le sens de l'expression « **… % de** » apparait en milieu de cycle. Il s'agit de savoir l'utiliser dans des cas simples (50 %, 25 %, 75 %, 10 %) où aucune technique n'est nécessaire, en lien avec les fractions d'une quantité. En fin de cycle, l'application d'un **taux de pourcentage** est un attendu.

I- Typologie des problèmes pour comprendre la proportionnalité

L'étude de la proportionnalité est envisagée à l'école primaire dans le **cadre des grandeurs**, dans des situations qui mettent en relation des **quantités**, des **mesures**, des **prix** …

1) Typologie des **situations servant de support à des problèmes**

Situations où la proportionnalité intervient par convention sociale : problèmes de la vie courante, de nature économique (relation entre quantité et prix par exemple) :

- Le **prix de la viande** est souvent proportionnel à la masse achetée,
- Le **prix de l'essence** est proportionnel à la quantité achetée,
- Le **prix à payer pour affranchir une lettre** n'est pas proportionnel à la masse (ex : même prix pour une lettre de 18g et une lettre de 9g).
-

Pour ces situations, les élèves sont soit préalablement informés (situations familières) ou alors il faut annoncer explicitement la proportionnalité retenue dans l'énoncé.

Situations où la proportionnalité permet une modélisation d'un phénomène :

- En physique : l'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse suspendue / le nombre de tours de roue d'un vélo est proportionnel au nombre de tous de pédales (sauf pour « roue libre »).
- En géométrie : le périmètre d'un cercle est proportionnel à la longueur du diamètre / la longueur de la diagonale d'un carré est proportionnelle à celle du côté.

Pour ces situations, on a recours à **l'expérimentation** ou à **l'utilisation de théorèmes** (Pythagore par exemple) pour mettre en évidence les éventuelles relations de proportionnalité entre grandeurs.
En physique, la proportionnalité se vérifie dans certaines limites.

Situations où la proportionnalité intervient comme un outil pour définir de nouveaux concepts : **agrandissement ou réduction d'objets géométriques, échelle, pourcentage, vitesse moyenne**, débit, masse volumique etc. Seules les 4 premières notions font l'objet de 1ers travaux en primaire. Ces notions sont construites en faisant une hypothèse de la proportionnalité qui est rarement vérifiée dans la réalité (ex : quand on dit qu'on a roulé en moyenne à 60 km/h, la vitesse instantanée a sans doute été que rarement égale à 60 km/h / quand on dit que 25% des élèves d'une école mangent à la cantine, on n'indique pas que sur tout échantillon de 100 élèves on trouvera à chaque fois 25 élèves qui mangent à la cantine -> donnée théorique fondée sur un hypothèse avec une population considérée).

2) **Typologie des problèmes posés**

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Problèmes de quatrième proportionnelle
Chercher le nombre manquant dans une relation qui met en jeu deux couples de nombres :
<table><tr><th>grandeur A</th><th>grandeur B</th></tr><tr><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>?</td><td>c</td></tr></table>
</td>
<td>Pour des grandeurs A et B de même nature :
<table><tr><th>grandeur A (distances dans la réalité)</th><th>grandeur B (distances sur le papier)</th></tr><tr><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>?</td><td>c</td></tr></table>
Les grandeurs peuvent être exprimées avec la même unité ou des unités différentes.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Pour des grandeurs A et B de nature différente :
<table><tr><th>grandeur A (distances en km)</th><th>grandeur B (durées en heures)</th></tr><tr><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>?</td><td>c</td></tr></table>
</td>
</tr>
</table>

Problèmes de comparaison de mélanges En général avec 3 quantités, le « tout » et au moins 2 parties complémentaires. *Ex : boisson composée de sirop de fraise et d'eau.*	On peut déterminer **une partie par rapport au tout** : *quantités de sirop à utiliser pour des quantités de boisson souhaitée, en voulant avoir des boissons de même goût.*
	On peut déterminer **une partie par rapport à l'autre partie** : *quantités de sirop à utiliser pour des quantités d'eau, pour avoir des boissons de même goût.*
	On peut déterminer **les proportions** : *tel mélange a-t-il plus ou moins le goût de fraise que tel autre (en connaissant les quantités d'eau et de sirop utilisées) ?*
Autres types de problèmes	**Les problèmes de double proportionnalité** : dans le cas **d'une grandeur proportionnelle à deux autres grandeurs** qui peuvent être modifiées de manière indépendante, comme : *l'aire du rectangle est proportionnelle à la largeur ou à la longueur du rectangle / le prix à payer pour un séjour est fonction du nombre de personnes et du nombre de jours*.
	Les problèmes de proportionnalité simple composée : dans le cas d'une grandeur qui varie proportionnellement à une autre qui varie, elle-même, proportionnellement à une 3ème. Ex : *6 vaches produisent 4000 L de lait en 30 jours. Combien de jours faut-il à 18 vaches pour produire 72 000 L de lait ?*

Pour chacun de ces types de problème, les élèves peuvent aussi être amenés à **déterminer si une situation relève ou non de la proportionnalité**.
Les problèmes de pourcentage, de vitesse et d'échelle sont traités dans le cadre plus général de l'étude de la proportionnalité.

II- Procédures de résolution utilisables par les élèves

A l'école primaire, 3 types de procédures peuvent être enseignées aux élèves.

<u>Ex de problème</u> : *« Pour faire une mousse au chocolat, Louis a trouvé une recette de sucre qui permet de faire quatre coupes. Il faut 2 œufs, 100g de chocolat, 30g de sucre. Calcule les quantités de chacun des ingrédients pour faire 10 coupes. »*
On fait l'hypothèse qu'il doit ya voir une relation de proportionnalité entre le nombre de coupes et la quantité de chaque type d'ingrédient, pour résoudre le problème.

<u>Procédures en appui sur les propriétés de la linéarité</u> :

- <u>Procédure 1</u> : **en appui sur la seule propriété mutliplicative de la linéarité**. *Elle revient à considérer que 10 coupes c'est « 2,5 fois plus de coupes que 4 coupes », et donc qu'il faut prendre 2,5 fois plus de chaque quantité d'ingrédients.*
  <u>Rappel</u> : le **coefficient de linéarité** permet de passer d'une valeur d'une grandeur à une autre valeur de la même grandeur.

	× 2,5 →	
Nombre de coupes	4	10
Quantité de sucre (en g)	30	75
	× 2,5 →	

× 2,5 est appelé « rapport de linéarité » ou « rapport scalaire ».

- <u>Procédure 2</u> : **en appui sur les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité**. *Elle revient à considérer que 10 coupes c'est 8 coupes (deux fois 4 coupes) plus 2 coupes (la moitié de 4).*

			: 2	
	× 2			
Nombre de coupes	4	8	2	10 = 8 + 2
quantité de chocolat (en g)	100	200	50	250 = 200 + 50
	× 2			
			: 2	

<u>Procédures en appui sur le passage par l'image de l'unité</u> : ces procédures sont aussi appelées « **règle de trois** » et s'appuient sur la **propriété multiplicative de linéarité**. On cherche les quantités nécessaires pour une coupe, ce qui permet ensuite d'avoir la réponse pour n'importe quel nombre de coupes.

		: 4	× 10
Nombre de coupes	4	1	10
quantité de chocolat (en g)	100	25	250
		: 4	× 10

<u>Procédures en appui sur le coefficient de proportionnalité</u> : revient par exemple à considérer qu'il faut deux fois moins d'œufs que de coupes. Le coefficient de proportionnalité entre le nombre de coupes et le nombre d'œufs est donc 2.

Nombre de coupes	4	10	: 2
Nombre d'œufs	2	5	

Utiliser pour les échelles : 10 cm sur le terrain vaut 1 cm sur la feuille, alors on divise toutes les distances par 10.

III- <u>Variables didactiques</u>

Le choix de recourir à l'une ou l'autre des procédures dépend des **valeurs choisies pour les variables** de la situation évoquée, notamment les variables numériques.

<u>Les différentes variables didactiques :</u>

- **<u>Relations entre les nombres donnés</u>** :
  - Le **<u>coefficient de proportionnalité</u>** entre les grandeurs en jeu peut être :
    - Un **nombre entier simple** *(relation entre 4 coupes et 2 œufs)* **ou non** *(relation entre 4 coupes et 3 œufs).*
    - Un **nombre décimal simple ou non** : *le coefficient entre le nombre de coupes et la quantité de sucre (x 7,5) est peu mobilisé car peu simple en primaire, le coefficient x1,5 est plus simple et plus facilement reconnu.*
    - Un **nombre fractionnaire** : *2 œufs pour 3 coupes (collège).*
  - **<u>Les rapports de linéarité entre nombres relevant d'une même grandeur</u>** :
    - Un **nombre entier simple** (*4 coupes au départ et la question porte sur les quantités nécessaires pour 12 coupes)* **ou non** *(4 coupes au départ et la question porte que les quantités nécessaires pour 52 coupes).*
    - Un **nombre décimal simple ou non** : *rapport entre 4 coupes et 10 coupes peut être simple pour quelques élèves de CM2 et difficile pour d'autres,*
    - Un **nombre fractionnaire** : *si 7 coupes, et on demande les quantités pour 4 coupes (collège).*

- **<u>Nombres de couples donnés</u>** : peut favoriser la multiplicité des combinaisons linéaires (utilisation des propriétés de linéarité) ou faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité. *Ex : indiquer les quantités nécessaires pour 4 coupes et celles pour 6 coupes, et pour déterminer les quantités pour 10 coupes, on aurait pu utiliser la propriété additive de linéarité en ajoutant les quantités de 4 coupes et de 6 coupes.*

- **<u>Contexte du problème :</u>** il permet de s'appuyer ou non sur une simulation (dessin, schéma de la situation) au moment de la résolution, et à la fin, peut donner lieu ou non à une validation par l'expérience. *Ex : le problème pour la mousse au chocolat ne permet pas une validation par l'expérience / « 4 bandes identiques mises bout à bout mesurent 10 cm. Quelle est la longueur de 6 de ces bandes ? » peut être validé par l'expérience.*

- **<u>Familiarité des élèves avec la situation évoquée</u>** : situation familière aux élèves favorise la mise en œuvre de raisonnements adaptés et le contrôle des résultats obtenus.

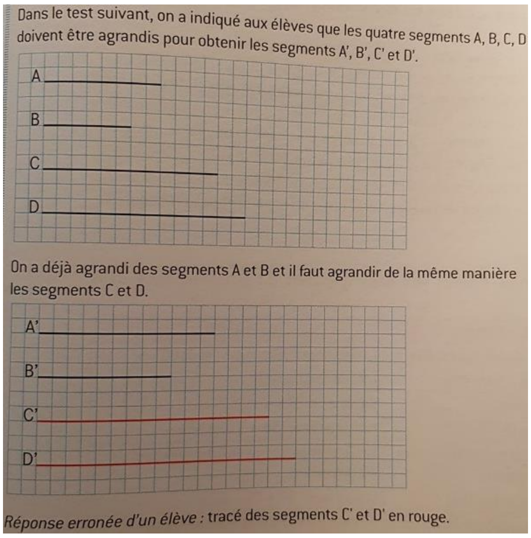
IV- Principales difficultés rencontrées par les élèves

Difficultés à identifier les grandeurs en relation dans la situation proposée : la présentation de la situation (texte, illustration, tableau …) peut influer sur cette difficulté. Il est préférable de laisser les élèves schématiser la situation sous forme de tableau. C'est l'occasion pour les élèves de prendre conscience des grandeurs en relation.

Difficultés à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnnel ou non : certains élèves pensent que toute situation où les données numériques sont organisées en tableau relève toujours de la proportionnalité -> faux. Le fait que la situation relève de la proportionnalité est rarement signalé explicitement dans l'énoncé et l'élève doit faire appel à des connaissances extérieurs (expérence sociale par exemple) ou deviner l'intention du maître qui lui a proposé le problème (contrat didactique).

Difficultés dans des situations de proportionnalité de type « augmentation » ou « diminution » : situations où on passe d'une 1ère à une 2ème grandeur (situations d'agrandissement ou de réduction de figures par exemple). Pour de nombreux élèves, les idées **d'augmentation** et de **diminution** sont liées **aux notions d'addition et de soustraction**, ce qui constitue un obsta**cle à la reconnaissance du modèle proportionnel,** qui pour plusieurs procédures, nécessite le recours à la multiplication ou à la division. Pour évoquer ce type de difficulté, on parle **d'obstacle additif**.

Exemple d'obstacle additif :



Analyse de l'erreur : l'élève a ajouté 4 carreaux à chacun de ces segments, en s'appuyant sur le fait que le segment A initial de 8 carreaux a été agrandi en un segment de 12 carreaux, alors que, pour avoir le même type d'agrandissement, la longueur de chaque segment doit être multipliée par 1,5 ou augmentée de la moitié de sa longueur initiale. Cet obstacle devra être traité par des situations didactiques appropriées.

Difficultés pour choisir une procédure de résolution : il faut être capable de mettre en évidence rapidement les relations qui existent entre les nombres donnés dans l'énoncé. Les compétences en calcul mental jouent un rôle décisif. De plus, les domaines numériques dans lesquels sont choisis les **nombres de l'énoncé** et les **relations entre ces nombres** jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des **variables didactiques décisives**. L'enseignant doit les choisir avec soin pour favoriser, chez les élèves, le recours à tel ou tel type de procédure.

Difficultés liées à la mise en œuvre de la procédure choisie : par exemple, comment combiner les nombres dans le cas de l'utilisation des propriétés de linéarité ? Comment déterminer le coefficient de proportionnalité si celui-ci n'est pas calculable mentalement ? De plus, l'exécution des calculs peut être source de difficultés (présence de décimaux, fractions par exemple).

DONC : il appartient à l'école non seulement **d'enseigner les procédures relatives au traitement des problèmes relevant du modèle proportionnel**, mais également de **doter les élèves de situations de référence** suffisamment nombreuses, issues soit du **domaine socio-économique** (achats, échanges …) soit **d'autres disciplines** (physique, géographie …), soit encore du **domaine mathématique** (géométrie, mesure).
Il est important que les **situations étudiées en relèvent pas toutes du modèle proportionnel**, afin d'exercer à la **vigilance** des élèves sur le choix du modèle et des procédures.