

## Chapitre 16 – Grandeurs et mesures

Les notions de grandeurs et mesures sont souvent confondues. Ex : on parle indifféremment d'aire, de mesure de l'aire, de surface / on utilise couramment les expressions « c'est un segment de 3 cm » ou « ce segment mesure 3 cm » (tome 1 p 439).

Ici on abordera 5 grandeurs étudiées à l'école : la longueur d'un segment ou d'une ligne (en lien avec périmètre), l'aire d'une surface, la masse d'un objet, le volume d'un solide, et la durée d'un évènement.

PROGRAMME DE L'ÉCOLE MATERNELLE (extraits)	
<b>4. Construire les premiers outils pour structurer sa pensée</b> [...]	
<b>4.2. Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées</b> [...]	
<b>4.2.1. Objectifs visés et éléments de progressivité</b> Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci. Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement.	
<b>4.2.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle</b> - Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.	
PROGRAMME DES CYCLES 2 ET 3 (extraits)	
Grandeurs et mesures	
CYCLE 2	CYCLE 3
<b>Attendus de fin de cycle :</b> Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques ces grandeurs <ul style="list-style-type: none"><li>• Comparer des objets selon plusieurs grandeurs et identifier quand il s'agit d'une longueur, d'une masse, d'une contenance ou d'une durée.<ul style="list-style-type: none"><li>- Lexique spécifique associé aux longueurs, aux masses, aux contenances, aux durées.</li></ul></li><li>• Comparer des longueurs, des masses et des contenances, directement, en introduisant la comparaison à un objet intermédiaire ou par mesurage.<ul style="list-style-type: none"><li>- Principe de comparaison des longueurs, des masses, des contenances.</li></ul></li><li>• Estimer les ordres de grandeurs de quelques longueurs, masses et contenances en relation avec les unités métriques.</li><li>• Vérifier éventuellement avec un instrument.<ul style="list-style-type: none"><li>- Ordres de grandeur des unités usuelles en les associant à quelques objets familiers.</li><li>- Rapports très simples de longueurs (double et moitié).</li></ul></li><li>• Mesurer des longueurs avec un instrument adapté, notamment en reportant une unité.</li><li>• Mesurer des masses et des contenances avec des instruments adaptés.</li></ul>	<b>Attendus de fin de cycle :</b> Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs <ul style="list-style-type: none"><li>• Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure.</li><li>• Mesurer des périmètres en reportant des unités et des fractions d'unités, ou en utilisant une formule.<ul style="list-style-type: none"><li>- Notion de longueur : cas particulier du périmètre.</li><li>- Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle.</li><li>- Formule de la longueur d'un cercle.</li><li>- Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération (grands nombres, nombres décimaux).</li></ul></li><li>• Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure.</li><li>• Différencier aire et périmètre d'une surface.</li><li>• Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.</li><li>• Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures.<ul style="list-style-type: none"><li>- Unités usuelles d'aire : multiples et sous-multiples du m<sup>2</sup> et leurs relations, are et hectare.</li><li>- Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.</li></ul></li></ul>

PROGRAMME DES CYCLES 2 ET 3 (suite)	
CYCLE 2	CYCLE 3
<ul style="list-style-type: none"><li>• Encadrer une grandeur par deux nombres entiers d'unités</li><li>• Exprimer une mesure dans une ou plusieurs unités choisies ou imposées.<ul style="list-style-type: none"><li>– Notion d'unité : grandeur arbitraire prise comme référence pour mesurer les grandeurs de la même espèce.</li><li>– Unités de mesures usuelles :</li></ul></li><li>• longueur : m, dm, cm, mm, km.</li><li>• masse : g, kg, tonne.</li><li>• contenance : L, dL, cL.<ul style="list-style-type: none"><li>– Relations entre les unités de longueur, entre les unités de masses, entre les unités de contenance.</li></ul></li><li>• Comparer, estimer, mesurer des durées<ul style="list-style-type: none"><li>– Unités de mesure usuelles de durées : j, semaine, h, min, s, mois, année, siècle, millénaire.</li><li>– Relations entre ces unités.</li></ul></li><li>• Dans des cas simples, représenter une grandeur par une longueur, notamment sur une demi-droite graduée.<ul style="list-style-type: none"><li>– Des objets de grandeurs égales sont représentés par des segments de longueurs égales.</li><li>– Une grandeur double est représentée par une longueur double.</li><li>– La règle graduée en cm comme cas particulier d'une demi-droite graduée.</li></ul></li></ul> <p><b>Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Résoudre des problèmes, notamment de mesurage et de comparaison, en utilisant les opérations sur les grandeurs ou sur les nombres.<ul style="list-style-type: none"><li>– Opérations sur les grandeurs (addition, soustraction, multiplication par un entier, division : recherche du nombre de parts et de la taille d'une part).</li><li>– Quatre opérations sur les mesures des grandeurs.</li><li>– Principes d'utilisation de la monnaie (en euros et centimes d'euros).</li><li>– Lexique lié aux pratiques économiques.</li></ul></li><li>• Résoudre des problèmes impliquant des conversions simples d'une unité usuelle à une autre.</li><li>• Convertir avant de calculer si nécessaire.<ul style="list-style-type: none"><li>– Relations entre les unités usuelles</li></ul></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Relier les unités de volume et de contenance.</li><li>• Estimer la mesure d'un volume par différentes procédures.<ul style="list-style-type: none"><li>– Unités usuelles de contenance (multiples et sous multiples du litre).</li><li>– Unités usuelles de volume (<math>\text{cm}^3</math>, <math>\text{dm}^3</math>, <math>\text{m}^3</math>), relations entre les unités.</li></ul></li><li>• Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités ou en utilisant une formule.<ul style="list-style-type: none"><li>– Formule du volume d'un cube, d'un pavé droit.</li></ul></li><li>• Identifier des angles dans une figure géométrique.</li><li>• Comparer des angles.</li><li>• Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.</li><li>• Reconnaître qu'un angle est droit, aigu ou obtus.</li><li>• Estimer la mesure d'un angle.</li><li>• Estimer et vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus.</li><li>• Utiliser un instrument de mesure (le rapporteur) et une unité de mesure (le degré) pour :<ul style="list-style-type: none"><li>– déterminer la mesure en degré d'un angle ;</li><li>– construire un angle de mesure donnée en degrés.</li></ul></li><li>– Notion d'angle.</li><li>– Lexique associé aux angles : angle droit, aigu, obtus.</li><li>– Mesure en degré d'un angle.</li></ul> <p><b>Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.</li><li>• Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.</li><li>• Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.<ul style="list-style-type: none"><li>– Formules donnant :</li></ul></li><li>• le périmètre d'un carré, d'un rectangle, longueur d'un cercle ;</li><li>• l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque ;</li><li>• le volume d'un cube, d'un pavé droit.</li><li>• Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.</li></ul> <p>Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– Unités de mesures usuelles : jour, semaine, heure, minute, seconde, dixième de seconde, mois, année, siècle, millénaire.</li></ul>

## I- Qu'est-ce qu'une grandeur ?

D'une façon très générale, une **grandeur** peut être considérée comme « **tout caractère d'un objet, susceptible de variation chez cet objet, ou d'un objet à l'autre** ».

### 1) Longueur d'une ligne

#### a) Longueur d'un segment

La **longueur d'un segment** est une grandeur définie par les deux relations suivantes : « **a même longueur que** » et « **a une longueur plus grande que** ».

La relation « a la même longueur que » : le segment m a la même longueur que le segment n s'il est possible de faire coïncider les extrémités de ces deux segments.

La relation « a une longueur plus grande que » : le segment m a une longueur plus grande que celle du segment n si, lorsqu'on superpose ces deux segments en faisant coïncider une de leurs extrémités, la deuxième extrémité de n se trouve sur le segment m.

Méthodes pour comparer des longueurs de segments sans mesurer :

- **Comparaison directe** : on cherche à faire coïncider les extrémités de deux segments. Cette comparaison directe peut se faire mentalement (si les segments sont de longueurs suffisamment différentes) ou expérimentalement ?
- **Comparaison en utilisant un objet intermédiaire** : utile si les deux segments ne sont pas déplaçables. On peut utiliser un **objet déplaçable** de même longueur qu'un de deux segments et le comparer au 2<sup>ème</sup> segment. On peut aussi utiliser le **compas** pour reporter une longueur.

La **notion de longueur** permet de définir d'autres notions :

- La **distance** entre deux points A et B qui est la longueur du segment [AB],
- La **hauteur**, la **profondeur**, la **largeur** ...

#### b) Longueur d'une ligne brisée, ligne courbe, ouverte ou fermée

Il n'est pas possible de comparer directement les longueurs de ces lignes, mais on peut le faire avec plusieurs moyens :

- **Si l'objet est déployable** (fil de fer par exemple), sa longueur est la longueur du segment obtenu en déployant l'objet,
- **Si c'est une ligne brisée** (non déployable), on utilise des segments intermédiaires superposables à chaque segment qui compose la ligne brisée que l'on aligne ensuite bout à bout. La longueur de la ligne brisée est la longueur du segment obtenu.
- **Si c'est une ligne courbe** (non déployable), on peut superposer sur cette ligne une ficelle que l'on déplie. La longueur de la ligne brisée est la longueur du segment obtenu.

### 2) Comparer des angles

- **Deux angles sont égaux** si on peut superposer simultanément leurs sommets et leurs côtés.
- **Un angle a est plus petit qu'un angle b** si, lorsqu'on fait coïncider les sommets de ces deux angles et un de leurs côtés, alors le second côté de a est « inclus » dans l'angle b.

### 3) Aire d'une surface

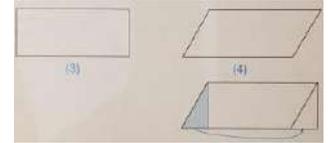
L'**aire** est une grandeur définie pour les **surfaces**. L'aire peut être définie par les relations suivantes (S et S' étant deux surfaces) :

- **S a la même aire que S'** si l'on peut transformer S par découpage, déplacement ... pour qu'elle se superpose à S'.
- **S a une aire plus grande que S'** si l'on peut transformer S' de façon à ce que la surface obtenue puisse être incluse dans S.

Méthodes pour comparer des aires de surfaces sans recourir à la mesure :

- Par **comparaison directe** (ex : superposer surface 1 à surface 2),
- Par **comparaison à l'aide d'une transformation licite** : par découpage / recollement.

Dans ces deux cas, les transformations peuvent se faire **effectivement** ou **mentalement**.



Deux types de surfaces sont plus difficiles à comparer :

- **Cas des surfaces qui sont délimitées par des lignes courbes** : découpage peut être complexe. On peut utiliser un quadrillage (1<sup>er</sup> passage vers la mesure) pour comparer (compter les carreaux).
- **Cas des surfaces qui ne sont pas superposables** : il faut alors utiliser une surface intermédiaire ou utiliser la mesure de ces surfaces.

4) Masse d'un objet

La **masse** est une grandeur qui caractérise les objets. La masse peut être définie par les relations suivantes :

- **Deux objets ont la même masse** si, lorsqu'on les pose sur chacun des deux plateaux d'une balance Roberval, elle est parfaitement en équilibre.
- **Un objet 1 est plus lourd qu'un objet 2** si, lorsqu'on les place sur chacun des deux plateaux d'une balance Roberval, le plateau sur lequel l'objet 1 est placé penche plus que le plateau sur lequel l'objet 2 est placé.

5) Volume (ou contenance) d'un solide

NB : mot « contenance » utilisé quand il s'agit de solides pouvant contenir des solides.

Le **volume** est une grandeur qui caractérise des solides. Le volume peut être définie par les relations suivantes :

- **Deux solides S et S' ont même volume** si, plongés dans une même quantité d'eau contenue dans des récipients identiques, la hauteur de l'eau monte de la même façon dans les deux récipients ou s'il faut la même quantité d'eau pour remplir S et S' (cas des contenances).
- **Un solide S a un volume plus grand qu'un solide S'** si, plongés dans une même quantité d'eau contenue dans des récipients identiques, la hauteur de l'eau monte plus dans le récipient contenant S que dans celui qui contient S'. On dit que le solide S a une contenance plus grande que S' s'il faut plus d'eau pour remplir S que S'.

Conclusion du I :

- **Une grandeur d'un objet est définie par deux relations qui lient ces objets :**
  - o Une relation d'égalité qui permet d'établir que deux objets ont la même grandeur,
  - o Une relation d'inégalité qui permet d'établir qu'un objet est plus « grand » qu'un autre.
- **Pour un même objet, on peut définir plusieurs grandeurs** : ex pour une baguette de bois -> longueur, volume, masse ...
- On peut **comparer des grandeurs d'objets** par **comparaison directe** mentalement ou expérimentalement à partir de la définition de la grandeur, ou par **comparaison indirecte** en utilisant un objet intermédiaire ou une transformation licite.
- **On peut définir une grandeur sans avoir recours aux nombres**. Mais ces différentes méthodes de comparaison de grandeurs ne sont pas toujours utilisables, soit parce qu'elles sont irréalisables (pas possible de découper un disque pour le superposer à un carré), soit parce qu'elles sont très « lourdes » à mettre en œuvre. Il existe aussi une autre méthode : l'utilisation de mesures -> le **mesurage**.

## II- Qu'est-ce que la mesure ?

Ayant fait le choix d'une grandeur appelée « **unité** », la **mesure d'une grandeur d'un objet** est le **nombre d'unités permettant de réaliser une grandeur égale à celle de cet objet**.

- La mesure est donc un **nombre** (ex : *la longueur du segment est de 3 cm*).
- La mesure d'un objet **dépend donc de l'unité choisie** ( $2\text{ cm} = 20\text{ mm}$ ), par contre la grandeur est invariante.
- Dans certains cas, on peut se contenter **d'encadrer** la mesure d'un objet.

### 1) Systèmes d'unités de mesure

Pour chaque grandeur, le système d'unités de mesure est construit en cohérence avec le **système de numération décimale**. Les élèves doivent comprendre les **relations entre les préfixes utilisés** et les **expressions utilisées pour les unités de numération** :

- Un décamètre est une dizaine de mètres,
- Un kilomètre est un millier de mètres...

*Ex : cela permet de comprendre que  $15,03\text{ m} = 1\text{ dam } 5\text{ m } 3\text{ cm} / 3000\text{ m} = 3\text{ km}$ .*

Pour les **grandeurs simples** (longueurs, masses, contenances), toute question portant sur les unités de mesures (conversion, comparaison, calcul) peut ainsi être assimilée à une question sur les **unités de numération**. Programmes cycle 3 « nombres et calculs » -> « le travail sur certaines unités de masse ou de longueur et sur leurs relations (gramme, kilogramme, tonne : centimètre, mètre, kilomètre etc) permet un retour sur les règles de numération ».

### 2) Mesure de longueurs

**Pour mesurer des longueurs de segments** : on prend un **segment quelconque** auquel on choisit d'attribuer 1 comme mesure de sa longueur : on l'appelle « **segment-unité** ». On reporte le segment-unité sur le segment que l'on mesure et on compte le nombre de reports.

La définition du mètre : à partir de 1790, le **système métrique** s'est imposé en France puis dans le monde -> le **mètre** et **ses sous-multiples** (décimètre, centimètre, millimètre) et **ses multiples** (décamètre, hectomètre, kilomètre).

Le **mètre** a été successivement défini comme **1/40 000 de la longueur du méridien terrestre**, puis comme la **longueur d'une règle en platine iridié** conservée au pavillon de Breteuil à Sèvres.

- ➔ Depuis 1983, le **mètre** est défini comme la **longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière** pendant une durée de 1/299 792 452 secondes.

**Pour mesurer des longueurs d'objets divers** :

- **Reporter la longueur unité et compter le nombre de reports** : ce nombre n'est pas forcément un nombre entier, on peut alors obtenir un encadrement de la longueur ou utiliser des « sous-unités ». La longueur peut alors être exprimée avec plusieurs unités (ex : 5m 7 cm) ou par un nombre décimal (5,07m) ou par un nombre fractionnaire  $\frac{507}{100}$  m.
- **Utiliser un instrument** : double-décimètre, mètre ruban, curvimètre (lignes courbes) etc.
- **Effectuer un calcul** (ex : périmètre). Pour certaines lignes courbes, comme le cercle, il existe une formule pour calculer sa longueur.

### 3) Mesure des aires

**Pour mesurer l'aire d'une surface** : on choisit comme **unité l'aire d'une surface donnée**. La mesure de l'aire est alors le nombre d'unités nécessaires pour recouvrir exactement et sans chevauchement la surface en question.

### Méthodes pour mesurer des aires en dehors du report de l'unité :

- Soit à l'aide d'un quadrillage,
- Soit par le **calcul en appliquant des formules de calcul d'aires** pour les figures usuelles (carrés rectangles etc) ou en décomposant la figure en figures usuelles.

#### 4) Mesure des masses

On choisit comme **unité la masse d'un objet donné**. Un instrument est ici nécessaire (balance à plateaux ou à lecture directe par exemple) car la superposition n'est pas possible comme pour les grandeurs géométriques.

#### 5) Mesure des volumes

On choisit comme **unité un solide**. La mesure du volume d'un solide est alors le nombre de solides nécessaires pour constituer un solide de même volume ou pour le remplir.

#### 6) Mesure des durées

Deux catégories de questions sont liées à la **notion de temps** :

- **Se repérer dans le temps par rapport à des évènements familiaux** (avant le repas, avant le mercredi...), ensuite par rapport à des **repères conventionnels** et en utilisant les nombres (date calendrier).
- **Evaluer des durées** : mesurer un intervalle de temps (nécessite le choix d'une unité).

Remarque : mesure des angles pas abordée en primaire.

### III- Compétences à acquérir à l'école primaire

#### 1) Généralités

Les **activités liées aux grandeurs et à la mesure** font intervenir, en étroite imbrication, des **notions géométriques** (pour les longueurs, les aires et les volumes) et des **notions numériques** (pour toutes les grandeurs). Elles contribuent à une meilleure maîtrise des unes et des autres.

#### **A- Aider les élèves à conceptualiser les différences entre objet réel, grandeur et mesure de cette grandeur**

L'élève doit apprendre à faire la **différence** entre : un **objet réel** (piscine circulaire, baguette ...) ou **géométrique** (segment, rectangle, disque ...), une **grandeur associée à cet objet**, la **mesure de cette grandeur**.

Les **grandeurs se définissent à partir de comparaisons indépendamment des nombres**. Ces méthodes de comparaison peuvent se faire soit par l'utilisation d'un objet intermédiaire, soit par des transformations licites. Ces méthodes peuvent être longues, fastidieuses, voire impossibles, c'est pour cela qu'il existe une 4<sup>ème</sup> méthode qui nécessite la définition d'une grandeur unité et permet d'associer à une grandeur un nombre appelé mesure.

- Le travail sur les grandeurs précède donc celui sur leur mesure.
- Dès l'école maternelle, les élèves comparent des objets selon leur longueur et leur masse.
- En CP, on aborde les mesures de longueur et de masse.
- Les aires sont abordées au début du cycle 3 à partir de comparaison de surfaces.

#### **B- Aider les élèves à donner du sens à la mesure**

Il faut mettre en place, dans un 1<sup>er</sup> temps, des activités de **comparaison des grandeurs indépendamment de toute unité** pour aider l'élève à s'approprier le concept de grandeur, puis **mettre en évidence les limites des méthodes de comparaison**, pour enfin **donner du sens à la notion de mesure**.

L'enseignement d'une grandeur et de sa mesure passe par plusieurs étapes :

- **Travail sur la grandeur** : comparaisons pour lesquelles la notion de grandeur suffit (comparaison directe ou avec gabarit),

- **Travail sur la mesure à l'aide d'une unité** : comparaisons dans des situations où le gabarit est trop petit : report du gabarit devient nécessaire et cela conduit au nombre et à la mesure. Dans certains cas, il peut y avoir fabrication ou utilisation d'un instrument.
- **Travail sur la mesure en utilisant le calcul** : recours au calcul est un moyen d'obtenir le résultat recherché (ex : périmètre du cercle).

2) Compétences relatives aux longueurs : comparer **sans mesurer**

	<b>Savoir comparer des longueurs d'objets « rectilignes » sans instrument de mesure</b>	<b>Savoir comparer des longueurs de lignes brisées et des périmètres (non déployables)</b>	<b>Savoir comparer des longueurs de lignes courbes et des périmètres avec un gabarit</b>
<b>Variables didactiques</b>	Caractéristiques des objets à comparer (longueurs, déplacement etc).	Les instruments mis à disposition de l'élève.	Le gabarit peut être une ficelle plus ou moins longue par exemple.
<b>Procédures</b>	<p>Si les <b>longueurs sont très différentes</b>, l'élève doit procéder à <b>vue d'œil</b>.</p> <p>Si les objets sont <b>facilement transportables</b>, l'élève peut faire <b>coïncider les extrémités</b>.</p> <p>Si les objets ne sont <b>pas facilement transportables</b>, l'élève peut :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliser un <b>objet intermédiaire transportable</b>,</li> <li>- Reporter la longueur du 1<sup>er</sup> objet sur le 2<sup>ème</sup> avec un <b>compas</b>,</li> <li>- Reporter un objet unité ou plusieurs différents.</li> </ul> <p>Si on est en présence d'un <b>objet du méso-espace non transportable</b> (ex : comparer 2 lignes tracées dans la cour), l'élève peut utiliser un <b>objet intermédiaire</b> ou reporter un <b>objet unité</b>.</p>	<p>Si l'élève dispose d'un <b>compas</b>, il doit <b>reporter</b> sur une demi-droite les longueurs des segments qui constituent la ligne brisée ou le périmètre.</p> <p>Si l'élève dispose d'<b>objets intermédiaires qu'il peut couper à la longueur qu'il veut</b> (ex : paille), il les <b>superpose</b> sur chacun des segments de la ligne brisée, puis met les objets <b>bout à bout</b> de façon rectiligne.</p>	<p><b>Si le gabarit est suffisamment long</b>, l'élève peut l'utiliser directement. Ex : il fait coïncider des morceaux de ficelle avec chaque courbe à comparer, puis il compare les longueurs des ficelles obtenues.</p> <p><b>Si le gabarit n'est pas suffisant</b>, il faut le reporter autant de fois que nécessaire et ensuite comparer les nombres de reports, et en cas d'égalité comparer les restes.</p>
<b>Difficultés / erreurs</b>	Elèves non conservant ( <i>cf en-dessous</i> ). Difficultés de manipulations entraînant des problèmes de précision.	<p>L'élève ne voit pas le lien entre le compas et la comparaison des longueurs car, pour lui, le compas sert essentiellement à tracer des cercles.</p> <p>L'élève applique des théorèmes en acte : « la ligne brisée la plus longue est celle qui contient le plus de segments » ou « la ligne brisée la plus longue est celle qui contient le segment le plus long ».</p> <p>Difficultés de manipulation. <i>+ cf en-dessous</i></p>	<p>Problème de manipulation.</p> <p>Difficulté à mémoriser le nombre de reports.</p>

Difficulté particulière pour la comparaison des longueurs : Piaget a mis en évidence que la **conservation des longueurs** se met en place au stade des opérations concrètes. 2 types d'expériences mettent en évidence cette difficulté à conserver les longueurs quand il s'agit de les comparer :

- Expérience 1 : le PE place devant l'élève 2 bandes A et B exactement l'une sous l'autre, puis il déplace la bande B vers la droite (sous le regard de l'élève). Dans le 1<sup>er</sup> cas, l'élève affirme que « B est aussi long que A », dans le 2<sup>ème</sup> cas, il affirme que « B est plus long que A ».



→ **Cet élève n'est pas conservant pour les longueurs.**

- Expérience 2 : on place 'abord devant un enfant une baguette de 16 cm et en dessous 4 baguettes de 4 cm mises bout à bout pour faire constater l'égalité des longueurs. Ensuite, on propose à l'enfant la disposition suivante avec les mêmes baguettes :



- C'est seulement vers **7 ans** (ou parfois plus tard) que l'enfant affirme avec certitude que les chemins A et B ont encore la même longueur.

### 3) Compétences relatives à la mesure des longueurs

	<b>Variables</b>	<b>Procédures</b>	<b>Difficultés / erreurs</b>
<b>Savoir mesurer des longueurs d'objets « rectilignes » avec le double-décimètre</b>	La nature du rapport entre la longueur à déterminer et les unités (cm et mm).	<b>Si ce rapport est un nombre entier, inférieur à la longueur de l'instrument</b> , l'élève place une extrémité de l'objet sur le 0 de la graduation de son instrument de mesure et il lit sur quelle graduation arrive l'autre extrémité de l'objet. <b>Si ce rapport est un nombre décimal inférieur à la longueur de l'instrument</b> , la procédure est la même que précédemment, sauf dans le cas où l'extrémité du segment tombe entre deux graduations (ex : 2,75 cm). <b>Si ce rapport est un nombre (entier ou décimal) supérieur à la longueur de la règle</b> , l'élève doit reporter le double-décimètre.	L'élève place l'extrémité de l'objet sur le début de la règle (induit de l'expérience antérieure des élèves avec l'utilisation du gabarit) : 0 # début de la règle.  L'élève n'arrive pas à donner un résultat lorsque la mesure ne correspond pas à un nombre entier de cm. Erreur liée à la lecture des mm.  L'élève peut se trouver bloqué. <u>Ou</u> suite à un phénomène de surcharge cognitive, l'élève peut oublier d'ajouter les longueurs obtenues par les reports successifs ou faire une erreur de calcul. <u>Ou</u> difficultés de manipulation.
<b>Savoir mesurer la longueur d'une ligne brisée ou le périmètre d'une figure avec un double-décimètre</b>	La mesure de chaque segment (est-ce un nombre entier ou pas ?). Le nombre de segments qui constituent la ligne brisée.	L'élève <b>mesure les longueurs de chacun des segments</b> composant la ligne brisée et additionne ces longueurs. Il peut utiliser la multiplication si les segments sont de même longueur.	L'élève ne perçoit pas le lien entre addition des mesures des longueurs et la longueur totale de la ligne brisée. Si les mesures des segments ne sont pas des nombres entiers, l'élève peut avoir des difficultés pour additionner des mesures complexes (ex : 5 cm 4 mm + 2 cm 8 mm). Plus il y a de segments, plus il y a de risque d'oublis et d'erreurs de mesure et de calcul.
<b>Savoir mesurer le périmètre</b>	Même que les autres + dépendent de la nature du polygone.	<b>Si le polygone est un carré ou un rectangle ou un polygone régulier</b> , à la place de la procédure qui consiste à mesurer chaque côté et à additionner les mesures, l'élève peut	Mauvaise mémorisation de la formule.  Confusion avec la formule de l'aire du rectangle ou du carré quand elle est connue.

d'un polygone par le calcul		appliquer une <b>formule</b> ou utiliser un <b>raisonnement</b> .	
Savoir mesurer le périmètre d'un cercle		Pour déterminer le périmètre du cercle, l'élève peut : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Soit utiliser un <b>objet intermédiaire dépliant</b> (ficelle par exemple),</li> <li>- Soit utiliser une <b>formule</b> : mesurer le diamètre du cercle et multiplier ce diamètre par <math>\pi</math></li> </ul>	
Savoir comparer et mesurer des distances			Même difficultés qu'avant + difficultés car distance n'est pas matérialisée.
Savoir effectuer des conversions d'unités de longueur	Dépendent de l'unité du nombre de départ ou d'arrivée et si ces unités sont voisines ou non.	<p><b>Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et ces unités sont voisines</b>, utilisation de la multiplication ou de la division par 10.</p> <p><b>Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est ou non familière et/ou ces unités ne sont pas voisines</b>, utilisation de la multiplication ou de la division par 10, par 100 ou d'un tableau de conversion.</p>	<p>Défaut de mémorisation de l'ordre des unités.</p> <p>Méconnaissance des relations entre les différentes unités.</p> <p>Si le nombre de départ ou le résultat est un nombre décimal, erreurs liées à l'écriture décimale des nombres et à la maîtrise des calculs (multiplication ou division par 10, 100 ...).</p>

#### 4) Compétences relatives aux aires

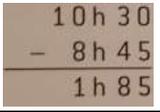
	Détails	Variables	Procédures	Difficultés / erreurs
Savoir comparer et mesurer des aires de surfaces données	1-Les surfaces ont des <b>aires très différentes</b> ou non.	Pour toutes : forme des surfaces et leur facilité à être incluses l'une dans l'autre.	<b>Si les aires sont très différentes</b> , l'élève peut effectuer cette comparaison à vue d'œil.	L'élève assimile aire et encombrement.
	2-Les surfaces sont <b>faciles à inclure l'une dans l'autre</b> .	Pour la 2-, fait de pouvoir déplacer les surfaces ou pas.	Si les surfaces sont <b>déplaçables</b> , l'élève peut effectuer les inclusions physiquement. Si les surfaces ne sont <b>pas déplaçables</b> , il doit effectuer les inclusions mentalement.	L'élève est tenté de « fermer » les figures concaves pour comparer leur aire. <i>Ex : élève dit que 1 a une aire supérieure à 2.</i> 
	3-Les surfaces peuvent être <b>incluses l'une dans l'autre</b> suite à des <b>découpages/recollements</b> .	Pour la 3-, instruments mis à disposition de l'élève.	Si l'élève dispose de <b>ciseaux</b> , il fait les découpages nécessaires. Si l'élève dispose d'un <b>crayon</b> et d'une <b>règle</b> , il représente ces transformations par des tracés. Si l'élève ne dispose <b>pas d'instrument</b> , il effectue ces transformations mentalement.	Difficulté à anticiper les tracés, découpages, et recompositions nécessaires.
	4-Les surfaces <b>ne peuvent pas être incluses l'une dans l'autre</b> suite à des <b>découpages/recollements</b> .		<b>Si ces surfaces sont des figures usuelles</b> , l'élève calcule l'aire de ces surfaces en appliquant les	Difficulté à mobiliser les images mentales.
				Problème de mémorisation des formules.

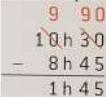
		<p>Pour la 4-, nature de la surface.</p>	<p><b>formules</b>, puis il comparer les nombres obtenus.  <b>Si ces surfaces peuvent se ramener à la réunion ou au complémentaire de surfaces usuelles</b> (ou par déplacement d'une partie de la figure), l'élève met en évidence ces figures usuelles, calcule les aires de chacune d'elles, et effectue les opérations nécessaires.  <b>Si ces surfaces ne peuvent pas se décomposer à l'aide de figures usuelles</b> (ex : figures à bord curviligne), l'élève trace un quadrillage et calcule la mesure de l'aire des surfaces en utilisant comme unité un carré du quadrillage. Dans beaucoup de cas, il pourra donner seulement un encadrement de la mesure.</p>	<p>Erreurs de calculs en particulier dans le cas d'utilisation de nombres décimaux.</p> <p>Difficultés pour décomposer la figure et pour calculer des aires des figures usuelles.</p> <p>Difficulté pour tracer le quadrillage.          Difficulté pour dénombrer les carrés dans la mesure où les lignes du quadrillage ne correspondent pas au contour de la figure.</p>
<p><b>Savoir effectuer des conversions d'unités d'aires.</b></p>	<p>Unité du nombre de départ ou d'arrivée et si ces unités sont voisines.</p>	<p><b>Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et ces unités sont voisines</b>, utilisation de la multiplication ou de la division par 100.  <b>Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est ou non familière et/ou ces unités ne sont pas voisines</b>, utilisation de la multiplication ou de la division par 100, par 10 000.  <b>Utilisation d'un tableau de conversion.</b></p>	<p>L'élève utilise les techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur (ex : <math>2 \text{ m}^2 = 25 \text{ dm}^2</math>).</p> <p>L'élève a des difficultés :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les calculs dans l'ensemble des nombres décimaux.</li> <li>- de mémorisation de l'ordre des unités.</li> <li>- pour placer les nombres et la virgule des nombres (si pas entiers) dans le tableau, puisqu'il y a 2 colonnes par unités.</li> </ul>	

Difficulté particulière pour la comparaison des aires : les élèves ont tendance à utiliser le **théorème en acte** suivant : « de deux aires, la plus grande est celle qui a le plus grand périmètre ». C'est un obstacle épistémologique. Mais ceci peut être faux.s

5) Compétences relatives à d'autres grandeurs

	Détails	Procédures / explications	Difficultés/erreurs
<p><b>Compétences relatives aux masses</b></p>	<p>Savoir comparer des masses sans recours à des mesures</p>	<p>L'élève peut :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- « <b>Soupeser</b> » les masses si elles sont très différentes (surtout C1).</li> <li>- Utiliser une <b>balance de type Roberval</b> et savoir que l'objet qui a la plus grande masse est celui qui sur le plateau le plus « bas ».</li> </ul>	

	Savoir mesurer la masse d'objets à l'aide d'une balance.	L'élève peut : - <b>Utiliser une balance de type Roberval avec des poids</b> : résultats sous forme d'unités complexes (2kg250g) ou avec des nombres décimaux (2,250kg). Pour ces derniers -> CM2 après introduction des nombres décimaux. - <b>Utiliser une balance de ménage à lecture directe.</b>	
	Savoir effectuer des conversions d'unités de masse.	Idem que pour conversions d'unités de longueurs.	
	Savoir résoudre des problèmes avec des unités de masse.	Résoudre des problèmes de comparaison ou des problèmes qui mobilisent l'addition, la soustraction ou la multiplication par un entier.	
<b>Compétences relatives aux capacités de volumes</b>	Savoir comparer des capacités / volumes sans recours à des mesures.	L'élève peut : - <b>Utiliser la comparaison à vue d'œil</b> si les capacités sont très différentes. Validation par transvasement des liquides. - Utiliser le <b>transvasement</b> pour comparer des capacités. - <b>Comparer les masses des solides</b> dans le cas de solides homogènes.	Les élèves ont tendance à se focaliser sur une des dimensions du récipient pour comparer leur capacité. Ex : hauteur du récipient seulement. <i>Cf conservation de substance en bas</i>
	Savoir mesurer la capacité d'un récipient en utilisant un liquide et un verre gradué.	Présenter les résultats sous forme d'unités complexes (1 L 25 cL) ou à l'aide de nombres décimaux (1,25L) (que pour CM2).	
	Savoir mesurer un volume en le remplissant avec un volume unité.	Ex : pavé droit rempli avec des cubes identiques.	
	Savoir calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule.	Seule formule que les élèves doivent savoir utiliser à l'école.	
	Savoir effectuer des conversions d'unités de contenances.	Même compétences que pour les conversions d'unités de longueurs.	
	Savoir lire l'heure en heures et en minutes à partir d'un affichage à aiguilles.	Permet de donner du sens aux égalités 1h = 60 min et 1 min = 60 s	
<b>Compétences relatives à la durée</b>	Savoir convertir des unités de durée.	Souvent demandé de convertir une durée en heures et minutes et inversement.	
	Savoir résoudre des problèmes liant horaires et durées.	Deux types de problèmes : - On donne l'heure du début d'un événement et sa durée, puis on demande l'heure de sa fin. - On donne la durée d'un événement connaissant l'heure de début (respectivement sa fin) de cet événement, puis on demande l'heure de fin (ou respectivement de début). <i>Ex : Je pars à 8h45 et j'arrive à 10h30. Quelle est la durée de mon trajet ?</i>	Les élèves traitent ce type de soustraction comme la soustraction de nombres décimaux. 

		<p>Procédures possibles : <b>calcul de proche en proche</b> (ex : de 8h45 à 9h, il y a eu 15 min, de 9h à 10h30, 1h30) : peut être schématisé / <b>calcul par soustraction</b> :</p>  <p>On prend 1h à 10h qu'on transforme en minutes et qu'on additionne aux 30 minutes, vu qu'on ne peut pas soustraire 45min à 30min.</p>	
	Savoir résoudre des problèmes utilisant des calculs sur des durées.	Pour l'addition, la soustraction de durées et multiplication d'une durée par un nombre entier, on retrouve les mêmes procédures et erreurs que ci-dessus.	
<p><b>Compétences relatives aux angles</b> (Mesure des angles pas abordée en primaire).</p>	Comparer des angles sans avoir recours à leur mesure.	<p>Source de difficultés. Elèves utilisent le <b>papier calque</b> ou un <b>gabarit</b> en primaire. La comparaison des angles peut se faire sur un polygone. Les élèves doivent donc isoler les angles de la figure = comprendre que l'angle d'un polygone est défini par un sommet de ce polygone et les deux côtés de ce polygone ayant ce sommet en commun. Il faut « oublier » le reste du polygone.</p>	<p>Les élèves peuvent comparer deux angles selon les longueurs des côtés de ces angles, ou fermer la partie en face de l'angle (joindre les extrémités des traits qui représentent les côtés) et comparer les aires des triangles obtenus. Les élèves se réfèrent donc naturellement aux grandeurs qu'ils connaissent : longueurs et aires.</p>
	Reproduire un angle.	Elèves utilisent un gabarit ou le papier calque.	

**Problèmes de conservation de substance (Piaget) :**

- 1<sup>ère</sup> étape : on présente 2 récipients cylindriques identiques en verre contenant la même quantité de liquide. On met côte à côte ces deux récipients (l'élève peut constater que les liquides arrivent au même niveau) et on leur demande s'il y a autant de liquide dans un récipient que dans l'autre. Les élèves répondent correctement.
  - 2<sup>ème</sup> étape : devant les élèves on verse le liquide de l'un des récipients dans un autre récipient cylindrique de rayon de base plus grand. Puis on demande aux élèves s'il y a autant de liquide dans un récipient que dans l'autre. Beaucoup d'élèves **de moins de 9 ans** pensent qu'il y a moins de liquide dans le nouveau récipient car le liquide arrive « moins haut ».
- ➔ On dit que ces élèves n'ont pas **atteint l'étape de la conservation de la substance**.

**NB** : la **notion de durée** est très **abstraite**. Il est difficile d'estimer une durée sans instrument car des éléments psychologiques interviennent (ex : le temps passe lentement quand on s'ennuie). L'élève doit faire la **distinction entre l'horaire** (il est 15h40 min) **et la durée** (il s'est écoulé 15h40 min entre ces deux événements) qui s'expriment avec la même unité.