

Chapitre 6 – Premier apprentissage des nombres (maternelle et CP)

L'apprentissage des nombres naturels (= **nombres entiers**) débute **dès l'école maternelle** où les élèves l'utilisent principalement pour évoquer des **quantités (aspect cardinal)**, puis pour évoquer des **rangs** dans une liste ordonnée (**aspect ordinal**).

A partir du CP, l'étude structurée de la numération décimale et du calcul commence.

Très jeunes les enfants ont le sens de la quantité (discrimination des collections en fonction de leur taille ; mise en relation des collections selon leur taille ; manipulation des quantités (surtout augmentation)).

A partir de 2-3 ans, les enfants sont capables de percevoir et d'exprimer en mots des petites quantités (inférieures à 4).

En **maternelle**, les enfants stabilisent leur connaissance des petits nombres et construisent le nombre pour **exprimer des quantités** ou **repérer des positions**, et pour **garder en mémoire**. Ils maîtrisent progressivement la **suite orale des nombres** et l'usage du **dénombrement**.

Programmes : cf fiche bristol

Etapes clés de l'apprentissage des nombres (PS à CM2) :

Cycle 1 : Prise de conscience de l'utilité du nombre, et nécessité de passer à un code écrit.

- > Mémorisation de la comptine numérique.
- > Acquisition des procédures de quantification (subitizing, comptage un par un, estimation)
- > Travailler différentes représentations de la quantité et de la position.
- > Nombres pour mémoriser / anticiper / comparer.

Cycle 2 : Numération orale et écrite des entiers.

- > Travailler les changements de représentations : verbales (orale et écrite) et symboliques.
- > Aspect algorithmique de l'écriture chiffrée : c'est comprendre la logique de l'écriture chiffrée de la suite des nombres.
- > Aspect sémantique de l'écriture chiffrée : c'est comprendre le sens de l'écriture chiffrée d'un nombre. Pour cela, il est nécessaire de :
 - distinguer la valeur de la quantité : activité d'échanges.
 - comprendre l'importance de faire des groupements.
 - repenser les groupements par rapport aux échanges : donner du sens à la valeur positionnelle d'un chiffre.
- > Comparer des nombres entiers.

Cycle 3 : les grands nombres (entiers).

- > Approfondir les aspects algorithmique et sémantique des nombres entiers en abordant des nombres dont l'écriture chiffrée contient davantage de chiffres (milliers, millions, milliards).

(Rem : Au cycle 3 seront également introduits d'autres types de nombres : les rationnels et les décimaux.)

A quoi servent les nombres ?

Aspect cardinal (nombres pour exprimer et comparer des **quantités**) :

- Mémoriser une quantité
- Comparer des quantités (plusieurs collections)
- Anticiper le résultat d'une augmentation ou d'une diminution.

Aspect ordinal (nombres pour repérer des **positions** dans une liste rangée) :

- Mémoriser un rang (une position)
- Comparer les positions occupées par des objets dans une liste rangée
- Anticiper le résultat d'un déplacement (en avant ou en arrière) dans une liste d'objets rangés.

1) Les types de problèmes que les élèves doivent résoudre en maternelle

Problèmes de mémorisation :

- **Problèmes d'équipotence** : deux collections d'objets sont **équipotentes** si une correspondance un à un peut être établie entre les deux collections, donc si elles comportent **autant d'objets l'une que l'autre**.
 - o « Construire une collection B équipotente à une collection A de référence ». *Ex : apporter autant de verres qu'il y a d'assiettes sur la table.*
 - o « Fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse construire une collection B équipotente à une collection A de référence ».
 - o « Construire une collection C à partir d'une collection de référence A, de manière à ce que, à chaque élément de A, correspondent 2,3 ... n éléments de C. ». *Ex : Apporter deux verres pour une assiette.*
- **Problèmes liés au repérage dans une liste** (nombres utilisés comme **mémoire de position** ici)
 - o « Se souvenir de la position d'un objet dans une collection d'objets identiques pour pouvoir le retrouver ou le remettre à sa place ».
 - o « Fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse trouver un objet dans une collection d'objets identiques »

Problèmes de comparaison :

- « Comparer deux collections A et B du point de vue de la quantité d'objets qu'elles contiennent »
- « Fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse comparer deux collections A et B du point de vue de la quantité d'objets qu'elles contiennent »
- « Compléter une collection B pour qu'elle soit équipotente à une collection A ».

Problèmes d'anticipation (ces problèmes sont résolus à partir du **CP**, avec des **procédures de calcul**) :

- Problèmes d'anticipation portant sur des quantités :
 - o « Trouver la quantité obtenue après qu'on a ajouté ou enlevé des objets dans une collection »
 - o « Trouver la quantité obtenue par la réunion de deux ou plusieurs collections »
 - o « Trouver le nombre d'éléments d'une des parties d'une collection en connaissant le nombre d'éléments de la partie complémentaire »
 - o « A propos du partage d'une collection en collection équipotentes ou non, chercher la valeur d'une part en connaissant le nombre de parts à réaliser ».
- Problèmes d'anticipation liés au repérage d'objets ordonnés : (possible en maternelle)

- « Trouver le point d'arrivée d'un pion se déplaçant sur une piste graduée (point de départ, sens et valeur de déplacement connus). »
- « Trouver le sens et la valeur du déplacement d'un pion se déplaçant sur une piste graduée (points de départ et d'arrivée connus). »

Pour chaque type de problème, on va définir :

- Les **variables didactiques**,
- Les **procédures de résolution** (en fonction des variables didactiques). Les premières procédures de calcul apparaissent en fin d'école maternelle.

2) Etude d'un problème d'équipotence

= **construire une collection B équipotente à une collection A donnée.** (Ex : ils ont des gobelets et doivent préparer une collection de pailles pour qu'une paille et une seule puisse être placée dans chaque gobelet).

a) Variables didactiques

- **Place des collections** : proches ou éloignées l'une de l'autre ?
- **Organisation des objets** : fixes ou déplaçables ? Comment sont-ils disposés ?
- **Nombre d'objets de la collection de référence** (<5 / entre 5 et 10 / >10).
- **Conditions de réalisation de la tâche** : combien d'essais possibles ?

b) Procédures de résolution

Correspondance :

- **Terme à terme** : associer les objets 1 à 1 (*placer directement une paille en face de chaque gobelet*),
 - **Paquet par paquet** : associer les objets en petites quantités. (*3 pailles pour 3 gobelets*),
- ➔ Utilisée par les élèves qui ne savent pas encore dénombrer.
➔ Peut être une procédure de **validation** après l'utilisation d'une autre procédure.

Difficultés :

- Difficile si les collections sont éloignées l'une de l'autre (allers-retours nécessaires),
- Difficile si aucun élément n'est déplaçable,
- Certains objets déplaçables ne sont pas pratiques (grande mobilité). Ex : billes / perles.

Dénombrement : dénombrer c'est utiliser un moyen qui permet d'exprimer une quantité par un nombre.

- **Subitizing** : reconnaissance perceptive immédiate (un seul coup d'œil), dès PS. Possible que pour de très petites quantités (4 ou 5 objets) ou pour des configurations particulières (ex : dé).
- **Par comptage de un en un** : la suite des mots-nombres est mise en correspondance terme à terme avec les éléments de la collection. Le dernier mot utilisé est suffisant pour garder la mémoire de la quantité. (ex : 3 étoiles -> un, deux, trois -> 3 objets)

Le **comptage de un en un** repose sur **cinq principes** essentiels à son bon fonctionnement (selon Gellman et Gallistel) :

- **Principe d'adéquation unique** : chaque mot énoncé doit être mis en correspondance terme à terme avec un seul élément de la collection que l'on cherche à dénombrer (ne pas pointer deux fois le même objet et pas oublier un objet).
- **Principe d'ordre stable** : les mots utilisés doivent toujours être les mêmes et énoncés dans un ordre strict (pas dire « un, deux, quatre »). Pour cela il faut connaître la comptine numérique.
- **Principe cardinal** : le dernier mot de la suite suffit pour exprimer la quantité, pour « cardinaliser » la collection.
- **Principe d'abstraction** : on peut compter des objets différents, quelle que soit la spécificité de chacun.
- **Principe de non-pertinence de l'ordre** : l'ordre dans lequel les éléments sont pris en compte est sans importance (dernier mot prononcé est toujours le même, même si on modifie la place des objets).

Difficultés : pour certains enfants, le dernier mot de la collection n'exprime pas la quantité globale mais désigne seulement le dernier objet pointé. Ils n'arrivent donc pas à répondre à la question « combien ... ? » et reprennent systématiquement le comptage à partir de 1.

Estimation approximative : permet l'évaluation approximative d'une quantité, avec la conscience que cette quantité n'est pas forcément exacte, mais qu'elle donne un bon **ordre de grandeur**.

Ex : dans la salle il y a une dizaine de personnes.

3) Etude d'un problème de repérage dans une liste

= **fournir une information à quelqu'un pour qu'il retrouve le rang et l'objet dans une collection.**

Ex : il y a une collection de boîtes. Un élève sort de la classe, une boîte est cachée dans une autre, un élève doit donner des informations pour que l'autre élève retrouve la boîte.

Variables didactiques :

- **Nature des objets de la collection** : tous identiques ou non,
- **Modalités du repérage** : peut-on désigner les objets du doigt ? Peut-on écrire dessus ?

Procédures :

- **Signe distinctif** : le problème peut être résolu sans recours aux nombres (attribuer un signe distinctif à chaque objet et indiquer le signe de l'objet qu'on cherche).
- **Numéroter fictivement les objets** en récitant la suite des nombres en même temps qu'on **pointe les objets**, et dire que l'objet qu'on cherche est le sixième.

4) Etude d'un problème de modification de quantités

= **augmentation (diminution) d'une quantité d'objets à la suite d'un ajout d'objets.**

Ex : On met X objets dans une boîte opaque, puis on y ajoute Y objets. Trouver le nombre total d'objets.

Variables didactiques :

- **Taille des nombres** : peu ou beaucoup d'objets,
- Objets **visibles** en totalité, partiellement ou pas du tout.

Procédures :

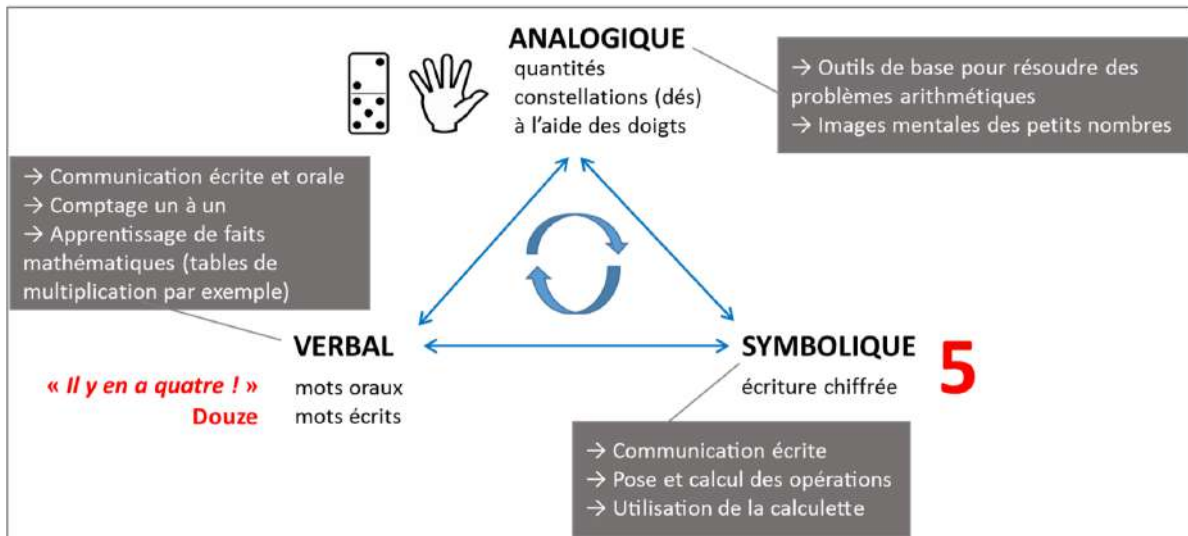
- **Recomptage** (7 objets, l'élève représente chaque objet par un dessin sur ses doigts, lève 4 doigts puis 3 et compte le tout sur ses doigts).
- **Surcomptage** (= comptage en avant) : l'élève part du nombre de base et ajoute la quantité. *Ex* : j'ai 3 billes auxquelles j'ajoute 2 billes, combien j'ai de billes ? On compte directement 4, 5. Peut s'aider avec les doigts, en levant 2 doigts (nombre ajouté) mais peut pas retenir le nombre de base avec ses doigts).
Difficulté : mauvais départ (compter 3, 4).
- **Décomptage** (= comptage en arrière) : quand les objets sont ôtés. *Ex* : on a 8 objets, on en enlève 3.
Difficultés : mauvais départ / reculer dans la suite des nombres.
- **Double comptage** : faire avancer deux suites numériques décalées en même temps. *Ex* : déplacer le pion de la case 5 à la case 9. L'élève peut se dire que 6, 7, 8, 9 fait qu'il doit avancer de 1, 2, 3, 4 cases -> il doit compter le nombre de mots prononcés. Il peut s'aider de ses doigts.
Difficulté : gérer deux comptages simultanément sans s'y perdre.
- **Procédures de calcul** : dès la fin de la maternelle, quand l'enfant retient certains résultats (*ex* : deux + deux = quatre).
Les élèves devront comprendre petit à petit que pour obtenir le nombre suivant à un nombre, il faut ajouter un.
Au CP, travail sur les +, -, =.

La manipulation d'objets ne doit pas être systématique pour résoudre des problèmes. Il doit résoudre le problème dans sa tête et peut valider sa réponse avec la manipulation si besoin.

Conclusion : la **résolution mathématique nécessite une anticipation sur l'action**, cela est possible :

- Si la **situation a du sens** pour l'élève,
- Si le **choix des situations** est bien fait (situations fonctionnelles ne sont pas les mieux adaptées (*ex* : préparer le goûter)).
- Si l'enseignant **sollicite** les élèves.

Le langage des nombres



Le **transcodage** est le fait de passer de l'une de ces registres à un autre.



Reconnaître les écritures : la relation entre écritures chiffrées, expressions orales et analogiques n'est pas naturelle. La reconnaissance des **écritures chiffrées** doit se faire avec un **apprentissage progressif** au cours duquel les élèves ont besoin **d'étayage**. Pour cela, on peut utiliser :

- Les **jeux de cartes traditionnels** (ex : jeu de bataille),
- La **file numérique** (l'élève parcourt la file du doigt en énonçant la comptine orale). Son usage ne doit pas être systématique !
- **Bande numérique**
- **Pascaline**
- **Tableau numérique**
- **Rouleau des nombres**
- **Spirale des nombres.**

File numérique

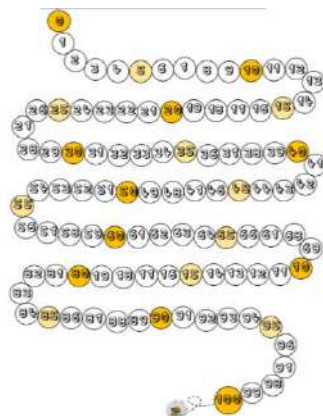
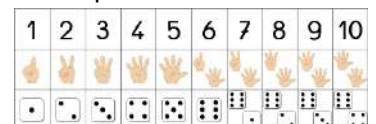


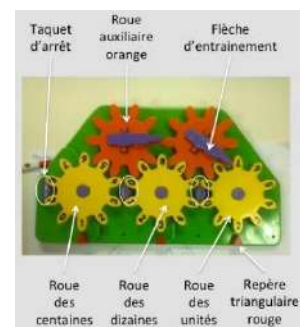
Tableau numérique

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

Bande numérique



Pascaline



En **maternelle**, introduire la bande numérique et l'écriture chiffrée des nombres de **1 à 9** (aspect syntaxique). On utilise des **collections**.

Au cycle 2, on continue le travail sur **l'aspect syntaxique de l'écriture chiffrée des nombres**. On introduit le **zéro**. On constitue le tableau des nombres, à partir de la bande numérique, par observation des symboles : la technique pour écrire les nombres est très régulière (aspect algorithmique). Pour cela, il n'y a pas besoin de connaître la désignation orale des nombres (ex : on peut comprendre qu'il faut écrire « 87 » dans le tableau sans savoir que cela signifie « quatre-vingt sept »).

Donc **cycle 2**, aspect syntaxique et algorithmique de l'écriture chiffrée des nombres. Puis distinction entre valeur et quantité. Enfin, travail sur l'aspect sémantique de l'écriture chiffrée des nombres. On peut travailler avec **l'abaque**.

Au **cycle 3**, on travaille avec des **grands nombres** (tableau de numération des grands nombres), on introduit les **fractions** et les **nombres décimaux**.

Aspect syntaxique : écriture du nombre en chiffres (1, 2, 3 ...) -> travail autour du « code ».

Aspect algorithmique : prendre conscience des régularités (et irrégularités) des écritures chiffrées de la suite numérique, avec bande numérique et tableau des nombres.

Aspect sémantique : donner du sens aux chiffres en fonction de leur position dans l'écriture chiffrée du nombre. -> comprendre la valeur des chiffres selon leur position dans l'écriture d'un nombre (rôle des groupements) et savoir lire l'information contenue dans cette écriture. Les exercices de groupement travaillent cet aspect.

Lien avec le **système de numération de position** : valeur du nombre dépend de sa position.

Lexique

Cardinal	Nombre d'objets d'une collection.
Chiffre	Symbole utilisé pour écrire les nombres. C'est un signe graphique. Il est à différencier du nombre.
Comptage	Action consistant à énumérer les objets d'une collection en associant, dans l'ordre à partir de <i>un</i> , un nombre à chaque objet (en s'appuyant sur la suite des nombres).
Constellation	Organisation des objets d'une collection qui permet d'en déterminer rapidement le nombre. Ex : constellation du dé, de doigts...
Correspondance terme à terme	Action de mise en correspondance de chaque objet d'une collection avec un objet et un seul de l'autre collection, sans oubli ni répétition.
Décomptage	Capacité à réciter la suite des nombres à partir d'un nombre quelconque, dans l'ordre décroissant.
Dénombrement	Détermination du nombre d'objets d'une collection. Le dénombrement peut se faire par reconnaissance immédiate de la quantité si elle est très petite (subitizing), par comptage des objets de un en un, par comptage des objets par groupement (de deux en deux, de cinq en cinq, de dix en dix, ...) ou par calcul.
Énumération	Action consistant à passer en revue une et une seule fois chacun des objets d'une collection.
Subitizing	Capacité à percevoir immédiatement une quantité, permettant une réponse quasi-instantanée à la question <i>Combien ?</i>
Surcomptage	Capacité à réciter la suite des nombres à partir d'un nombre quelconque, dans l'ordre croissant.

Dénombrer : utiliser un moyen qui permet d'exprimer une quantité par un nombre.

Compter : mettre en relation la suite des mots-nombres avec les éléments d'une collection.