

## Chapitre 7 – Numération décimale

A partir du CP, l'étude des différents modes de désignation des nombres, avec des chiffres (numération décimale de position) et avec des mots (oralement ou à l'écrit, en lettres) commence. Puis, il y a l'étude des grands nombres (millions et milliards).

L'enseignement de la désignation des nombres doit prendre en compte :

- Le **système qui utilise des chiffres** (donc écrit : numération chiffrée),
- Le **système qui utilise des mots** (expression orale ou écrite).

PROGRAMME DES CYCLES 2 ET 3 (extraits) Nombres et calculs	
CYCLE 2	CYCLE 3
<p><b>Attendus de fin de cycle :</b></p> <p><b>Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Dénombrer, constituer et comparer des collections.</li><li>• Utiliser diverses stratégies de dénombrement.<ul style="list-style-type: none"><li>- Procédures de dénombrement (décompositions/recompositions additives ou multiplicatives, utilisations d'unités intermédiaires : dizaines, centaines, en relation ou non avec des groupements).</li></ul></li><li>• Repérer un rang ou une position dans une file ou sur une piste.</li><li>• Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précède.<ul style="list-style-type: none"><li>- Relation entre ordinaux et cardinaux.</li></ul></li><li>• Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, &lt;, &gt;.<ul style="list-style-type: none"><li>- Égalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre.</li><li>- Ordre.</li><li>- Sens des symboles =, ≠, &lt;, &gt;.</li></ul></li></ul> <p><b>Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Utiliser diverses représentations des nombres (écritures en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main...).</li><li>• Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées.</li><li>• Interpréter les noms des nombres à l'aide des unités de numération et des écritures arithmétiques.<ul style="list-style-type: none"><li>- Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres).</li><li>- Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).</li><li>- Noms des nombres.</li></ul></li><li>• Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.</li><li>• Associer un nombre ou un encadrement à une grandeur en mesurant celle-ci à l'aide d'une unité.<ul style="list-style-type: none"><li>- La demi-droite graduée comme mode de représentation des nombres grâce au lien entre nombres et longueurs.</li><li>- Lien entre nombre et mesure de grandeurs, une unité étant choisie.</li></ul></li></ul>	<p><b>Attendus de fin de cycle :</b></p> <p><b>Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.<ul style="list-style-type: none"><li>- Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations.</li></ul></li><li>• Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).</li><li>• Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.</li></ul>

Repères de progressivité :

- **Cycle 2** : l'étude de la **numération décimale écrite en chiffres** (dizaines, unités simples), pour les nombres jusqu'à 100 et celle de la **désignation orale**, permet aux élèves de dénombrer et constituer des collections de plus en plus importantes (la complexité de la numération orale en France doit être prise en compte pour les nombres supérieurs à 69). Au CE1, un temps conséquent est consacré à la reprise de l'étude des nombres jusqu'à 100, notamment pour leur désignation orale et pour les stratégies de calcul mental ou écrit. Parallèlement, l'étude de la numération décimale écrite (centaines, dizaines, unités simples) est étendue par paliers, jusqu'à 200, puis 600, et éventuellement 1000. Puis en CE2, jusqu'à 10 000.
- **Cycle 3** : en début de cycle, les nombres sont abordés jusqu'à 1 000 000 puis progressivement jusqu'au milliard. Ce travail devra être entretenu tout au long du cycle 3.

I- Typologie des problèmes permettant de comprendre la numération chiffrée

**5 types de problèmes** pour permettre aux élèves de comprendre la **signification des écritures chiffrées** et de la **numération décimale**.

Problèmes faisant intervenir la relation entre quantités et écritures des nombres en chiffres :

- A : Organiser une collection d'objets pour pouvoir écrire facilement le nombre d'objets qu'elle contient (problème de codage),
- B : Construire une collection dont le nombre d'objets est donné par son écriture chiffrée (problème de décodage),
- C : Comparer deux quantités d'objets à partir des expressions chiffrées des nombres d'objets (comparaison des nombres entiers)

Problèmes concernant l'organisation de la suite des nombres écrits en chiffres :

- D : Produire la suite des nombres d'un en un, de dix en dix ... (écriture des suites de nombres entiers),
- E : Placer des nombres sur une ligne régulièrement graduée (placement ou repérage des nombres sur une ligne graduée).

1) Problèmes faisant intervenir la relation entre quantités et écritures des nombres en chiffres (A et B)

a) Problème de codage (de la quantité à l'écriture chiffrée)

➔ **Organiser une collection importante pour pouvoir écrire facilement le nombre d'objets qu'elle contient.**

Pour cela, les élèves vont apprendre à utiliser 2 types de procédures :

- Procédure 1 : représenter la quantité d'objets par des **groupements successifs réguliers de dix**. Faire d'abord des groupements de 10 objets (dizaines), puis des groupements de 10 dizaines d'objets (centaines), puis des groupements de 10 centaines d'objets (milliers) etc. Puis écrire le nombre. *Ex : 3 milliers, 4 dizaines, 2 objets isolés = 3042.*
- Procédure 2 : représenter la quantité par un **nombre limité d'objets choisis à l'avance** qui permet de produire l'écriture chiffrée. Utilisation simultanée de **groupements de dix** et **d'échanges de dix objets** d'un certain type par un objet d'un autre type. *Ex : dénombrer un lot*

de 10 carrés et dès qu'on a 10 carrés, on les échange contre un triangle qui représente la dizaine, etc. Si à la fin on a 3 losanges, 4 triangles et 2 carrés = 3042. A chaque type d'objet est associée une valeur.

Connaissances sur la numération décimale établies par les élèves avec ces deux procédures :

- La **régularité des groupements successifs par dix** (base dix),
- Les **égalités** : 1 dizaine = 10 unités / 1 centaine = 10 dizaines / 1 centaine = 100 unités,
- Le fait que **chaque type d'unité de numération** (unité, dizaine, centaine etc) **correspond à une position** (un rang) dans l'écriture du nombre.
- Le **rôle du 0** pour marquer l'absence d'unité d'un certain type,
- Les **décompositions** associées, comme :  $3042 = 1000 + 1000 + 1000 + 10 + 10 + 10 + 10 + 2$  /  $3042 = (1000 \times 3) + (10 \times 4) + 2$ .

NB : un lien est fait à partir de la fin du cycle 2, entre unités de numération et unités du système métrique (ex : entre millier et kilomètre).

L'objectif de l'enseignement est de proposer aux élèves des activités qui leur permettent de comprendre ce système et de se l'approprier.

La **monnaie** fonctionne selon le principe de **groupements-échanges**. Pour travailler le système de numération, on utilise des pièces et des billets de 1€, 10€ et 100€. Ex : 10 billets de 10€ échangés contre 1 billet de 100€.

Le **boulier** peut aussi être utilisé.

### **b) Problème de décodage (de l'écriture chiffrée à la quantité)**

➔ **Construire une collection dont le nombre d'objets est donné par son écriture chiffrée.**

Ex : des timbres sont vendus par pochettes de 100 timbres et carnets de 10 timbres. Combien de pochettes et de carnets de timbres faut-il acheter pour avoir 2 340 timbres ?

Le décodage de 2340 en 2 milliers 3 centaines 4 dizaines permet de trouver le nombre de carnets (4 dizaines). Pour trouver le nombre de pochettes (centaines), il faut utiliser un décodage chiffre à chiffre (2 milliers et 3 centaines) et le fait que 1 millier est égal à 10 centaines : il faut donc 23 centaines (20+3).

Il est important que ces élèves deviennent capables de décoder l'écriture chiffre par chiffre, mais aussi avec des groupes de chiffres. Ex : 2340 : 2 milliers, 3 centaines et 4 dizaines / 23 centaines et 4 dizaines / 234 dizaines etc.

Cela peut se traduire par différentes **décompositions**.

Le recours à un **tableau de numération** peut être une aide pour les élèves :

Millier	Centaine	Dizaine	Unité
1000	100	10	1
2	3	4	0

## 2) Comparaison de nombres entiers (C)

Au **cycle 1**, les problèmes de comparaison concernent surtout les **collections** elles-mêmes.

A partir du cycle 2, la **comparaison de quantités** suppose la **comparaison de nombres à partir de leurs écritures chiffrées**. Les élèves élaborent des procédures personnelles, puis apprennent une procédure experte.

### a) Procédures expertes de comparaison des nombres

#### Procédure 1 :

- Si les deux nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres.
- Si les deux nombres ont le même nombre de chiffres, on regarde le chiffre du rang le plus à gauche :
  - o Si ces deux chiffres sont différents, le plus grand nombre est celui pour lequel ce chiffre est le « plus grand »,
  - o Si ces deux chiffres sont pareils, on regarde le chiffre suivant etc, jusqu'à ce que deux chiffres de même rang soient différents : le plus grand nombre est celui pour lequel ce chiffre est « le plus grand ».

Procédure 2 : si les deux nombres sont écrits l'un sous l'autre avec alignement à partir du rang des unités.

- On compare d'abord les chiffres figurant au rang le plus élevé. En l'absence de chiffre pour un rang pour l'un des nombres, considérer que le chiffre est 0 (ex : 0732 / 2345).
- Si ces chiffres sont différents, le plus grand nombre est celui qui a le chiffre de plus grande valeur pour le rang considéré (ex : 2345 > 732).
- Pour les nombres qui comportent des chiffres identiques au rang considéré, recommencer avec le rang immédiatement inférieur, puis en cas d'égalité, au rang encore inférieur etc (ex : 2362 > 2345).

### b) Procédures personnelles de comparaison des nombres

Ex : 2345 et 2362.

- **Représenter les nombres par des quantités** : 2 groupements de 1000 et 3 de 100 dans les deux cas. Les 6 groupements de 10 (contre 4) permettent de conclure que 2<sup>ème</sup> nombre est le plus grand.
- **Utiliser un raisonnement du type** : il y a 2 milliers et 3 centaines dans chaque nombre, mais 6 dizaines dans le second contre 4 seulement dans le 1<sup>er</sup>, ce qui permet de conclure.

### c) Erreurs fréquentes dans la comparaison des nombres

- **Erreurs du type 46 > 203** : l'élève compare les chiffres 4 et 2 sans se soucier de leur valeur. Cette procédure vient du fait qu'elle est correcte quand les deux nombres ont le même nombre de chiffres.
- **Erreurs du type 23 < 17** : élève n'a pas compris le principe d'écriture des nombres et pense que les chiffres s'additionnent. Ex : 23 pour lui vaut 2+3, et 17 vaut 1+7, donc 5<8, donc 23<17. La confusion vient peut être du fait que l'addition est souvent associée au rapprochement de 2 quantités.

- **Symbolisme de la comparaison non maîtrisé (signes < et >)** : l'élève n'arrive pas à coder la comparaison. Il faut donc distinguer 2 compétences pour l'évaluation : savoir comparer deux nombres, et savoir coder le résultat de la comparaison à l'aide des signes < et >.
- **Comparaison des nombres à partir de chiffres des unités** : après étude de l'addition et de la soustraction posée, la procédure erronée qui peut s'installer consiste à comparer les nombres à partir des chiffres des unités. Ex :  $123 < 56$  car  $3 < 6$ . Vient du fait que pour le calcul posé, on insiste sur le fait de commencer par les unités.

### **3) Problèmes pour écrire des suites de nombres (D)**

- L'organisation de la suite des nombres écrits en chiffres, parfaitement régulière, correspond aux effets des groupements en base dix.

#### Compétences à acquérir

##### La suite des nombres de 1 en 1 :

- Le **passage de 209 à 210** : délicat car il correspond au fait que, en ajoutant un objet à une collection qui en contient déjà 209 (2 centaines et 9 unités), on obtient 10 unités qui, regroupées, donnent une dizaine. D'où l'écriture 210 (2 centaines et 1 dizaine).
- Le **passage de 299 à 300** : en ajoutant un objet à 2 centaines, 9 dizaines et 9 unités, on obtient 10 unités qui donnent une dizaine supplémentaire, ce qui aboutit à 10 dizaines qui donnent la centaine supplémentaire, d'où les 3 centaines de 300.

Pour cette suite les élèves sont capables d'apprendre à écrire le début puis de la prolonger par la simple observation de son fonctionnement l'utilisation de son algorithme, et cela bien avant d'avoir compris le rôle des groupements.

**La suite des de 10 en 10, de 100 en 100** : ces deux suites d'obtiennent de la même manière. Ex : 286-296-306 -> on imagine qu'on ajoute 1 dizaine à chaque fois. Le passage de 296 à 306 s'explique par le fait qu'on ajoute 1 dizaine aux 9 dizaines de 296, et qu'on obtient 10 dizaines transformées en 1 centaine.

##### Erreurs fréquentes pour écrire la suite des nombres de 1 en 1 :

**Après 29, l'élève écrit 39** : l'élève fait « avancer de 1 » le chiffre des dizaines et pas celui des unités. On peut faire l'hypothèse qu'il a retenu que pour augmenter de 1 un nombre qui se termine par 9, n augmente de 1 le chiffre situé à gauche de 9, mais sans avoir perçu que le chiffre des unités passe à 0. OU l'élève peut croire qu'après 9 il n'y a pas de chiffre (s'il sait écrire de 28 est après 27 par exemple).

**Après 29, l'élève écrit 210** : pour lui, « après 9 il y a 10 » : les chiffres des unités et des dizaines fonctionnent de manière isolée.

**Après 310, l'élève écrit 320** : il fait avancer le premier chiffre non nul à partir de la droite (ici passage de 1 à 2), ce qui peut être dû au fait que 0 n'est pas considéré comme un chiffre comme les autres (on compte à partir de 1 et pas de 0).

### Aide et remédiation

Si ces suites écrites doivent être bien maîtrisées par les élèves, il est important, pour le maître, de ne pas confondre la **compréhension et la maîtrise de l'algorithme** avec celles des **fondements sémantiques** (le rôle des groupements et des échanges) de notre système de numération.

Tous les **outils** permettant l'affichage de cette suite (empruntés à la vie quotidienne ou fabriqués pour l'école) peuvent être proposés à l'observation des enfants (mètres de couturière, bandes numériques, tableaux des nombres 10x10, droites numériques graduées de 1 en 1, de 10 en 10 etc).

Les prises de conscience ne se font pas par tous les enfants au même moment ou à partir du même matériel.

#### **4) Problèmes pour placer ou repérer des nombres sur une ligne graduée (E)**

Compétences à acquérir : la compétence liée au placement des nombres sur une ligne graduée apparaît dès le **CE1**. Elle suit les travaux de GS et CP sur les files numériques (ex : jeu de l'oie).

Au **CE1**, les repères sont placés de **1 en 1** et le placement revient à un travail sur la suite des nombres de 1 en 1. Plus tard, le pas de graduation peut être fait de 5 en 5, de 10 en 10 ou de 100 en 100. Il sera alors demandé d'associer des nombres et des positions sur la droite graduée (de **manière exacte** ou de **manière approchée**).

*Ex : sur une ligne graduée de 100 en 100, pour placer 250 ou 75, on peut le faire exactement, alors que le nombre 287 devra être placé de manière approximative.*

Ce type d'activité renforce la maîtrise de la comparaison des nombres, des suites de nombres organisés selon un pas donné, et des relations de proximité entre les nombres.

A la fin du cycle 2 et au **cycle 3**, les élèves sont invités à **placer des nombres approximativement sur une ligne graduée**. *Ex : placer 2380 sur une ligne graduée de 100 en 100. Pour cela, l'élève doit savoir que  $2300 < 2380 < 2400$ .* Ce type d'activité constitue une approche de la notion **d'ordre de grandeur**.

#### Erreurs fréquentes pour placer des nombres :

- **L'élève ne tient pas compte du pas choisi** : considère que le pas est toujours de 1 (base des premiers exercices qu'il a traités).
- **L'élève ne tient pas compte des relations entre les nombres** (*ex : sur une droite graduée de 100 en 100, il place 325 au milieu de l'intervalle [300 ; 400]*).

#### II- Désignation orale des nombres, et passage de l'oral à l'écrit et de l'écrit à l'oral

Trois types d'apprentissage peuvent être provoqués :

- Apprentissage du début de la suite orale des nombres,
- Apprentissage de la correspondance entre désignation verbale et désignation chiffrée,
- Apprentissage de la comparaison de nombres exprimés verbalement.

##### **1) Apprentissage du début de la suite orale des nombres**

Un des premiers contacts des enfants avec les nombres passe par la **récitation de la suite orale (comptine numérique)**. Mais ses nombreuses **irrégularités**, surtout présentes au début, n'en facilitent pas la mémorisation.

Suite des nombres de onze à dix-neuf : il y a une construction cohérente pour dix-sept, dix-huit, dix-neuf. On aurait pu faire dix-un, dix-deux, mais ce n'est pas le cas pour certains. Une **mémorisation** complète est donc nécessaire.

Suite des nombres de vingt à cinquante-neuf : plus facile à mémoriser car il existe une **sur-comptine des dizaines** (vingt, trente, quarante, cinquante) qui détermine toutes les autres dénominations avec une construction régulière (vingt-trois construit comme trente-trois).

Suite des nombres de soixante à quatre-vingt-dix-neuf : à partir de **soixante**, les difficultés deviennent plus importantes. D'abord, les **régularités perçues auparavant ne fonctionnent plus** car il n'y a plus un mot pour chaque dizaine (soixante est associé soit à 6 dizaines comme dans soixante-deux, soit à 7 dizaines comme dans soixante-douze). Ensuite, les mots que l'on rencontre ont des compositions variées :

- **Soixante-dix** obéit à une composition uniquement additive :  $60 + 10$ ,
- **Quatre-vingts** est composé de façon multiplicative :  $4 \times 20$ ,
- **Quatre-vingt-dix** cumule les deux types de composition :  $4 \times 20 + 10$ .

NB : il vaut mieux travailler la suite des nombres régulière et l'irrégulière en même temps (faire de soixante à soixante-dix-neuf, puis quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf, et pas s'arrêter à soixante-neuf et faire plus tard le reste).

## 2) Apprentissage de la correspondance oral-chiffre

### Nombres inférieurs à 100 :

- Zone régulière des nombres de 20 à 59 : la lecture des écritures chiffrées est assez simple. Dans « trente-sept », j'entends trente et sept, je vois 3 pour trente et 7 pour sept.
- Zone irrégulière des nombres de 60 à 99 : il faut travailler en deux temps :
  - o La zone de **60 à 79** pour installer l'idée que « quand j'entends soixante... le chiffre des dizaines peut être 6 ou 7, cela dépend de qui suit soixante ».
  - o La zone de **80 à 99** « quand j'entends quatre-vingts... le chiffre des dizaines peut être 8 ou 9, cela dépend de ce qui suit quatre-vingts ». De plus, le quatre entendu n'est pas traduit par 4 !

### Nombres supérieurs à 100 :

- Le système de lecture des nombres devient systématique : le travail de **décomposition** des nombres sous forme canonique (utiliser les puissances de dix) peut apporter une aide. Ex :  
 $2393 = (2 \times 1000) + (3 \times 100) + 93$   
Deux-mille trois-cent quatre-vingt-treize  
Cette décomposition aide à écrire le chiffre depuis sa désignation orale.
- Les grands nombres : à l'école primaire, les nombres vont au-delà de dix-mille ou cent-mille et sont étudiés au cycle 3. Les écritures chiffrées sont organisées en tranches de trois chiffres (avec appui sur le millier), séparés par un court espace pour en faciliter la lecture.

### Erreurs fréquentes pour lire et écrire les nombres :

- **Soixante-seize traduit par 616 ou par 6016** :
    - o 1<sup>er</sup> cas : soixante appelle 6 et seize appelle 16,
    - o 2<sup>ème</sup> cas : soixante appelle 60 et seize appelle 16.
- ➔ L'élève traduit ce qu'il entend ou ce qu'il lit.

- **Deux-mille-cinquante traduit par 250 ou par 200050 :**
  - 1<sup>er</sup> cas : l'élève écrit le 2 et le 50 en ne tenant pas compte du « mille » qu'il ne sait pas comment écrire.
  - 2<sup>ème</sup> cas : écriture de chaque terme entendu.

**NB** : nouvelle orthographe pour l'écriture des nombres depuis 1990. « **On lie par des traits d'union les numéraux formant un nombre** ». *Ex : elle a vingt-quatre ans / il date de quatre-vingt-neuf / cette maison a deux-cents ans...* Cette règle permet notamment de distinguer : vingt-et-un tiers ( $21/3$ ) et vingt et un tiers ( $20 + 1/3$ ).

### **3) Comparaison des nombres à partir de leurs désignations orales**

A l'oral, les comparaisons de nombres se font principalement par **appui sur certains mots entrant dans la composition des mots-nombres étudiés**.

*Ex : pour comparer deux-mille-cinq-cent-quarante-trois et douze-mille-huit-cent-treize, seule la partie entendue avant le mot « mille » doit être prise en compte.*

Les élèves doivent prendre conscience qu'à l'oral le nombre de mots utilisés ne joue pas le rôle joué par le nombre de chiffres dans les écritures chiffrées. De même, à l'écrit, la longueur de l'écriture en lettres ne donne aucune indication sur la taille d'un nombre.