Maths didactique

Chapitre 8 – Fractions et nombres décimaux

L'étude des fractions et des nombres décimaux commence au **CM1**.
En primaire, **l'étude des fractions** est limitée à des cas simples (demi, quart, dixième, centième, millième). Le calcul sur les fractions n'est pas envisagé, sauf pour l'addition de fractions de même dénominateur.
L'enseignement de la **désignation des nombres décimaux** avec une virgule s'inscrit dans la suite de celle de la numération décimale de position avec les nombres naturels, dont elle reprend les principes.
Les élèves apprennent à calculer avec les nombres décimaux.

PROGRAMME DU CYCLE 3 (extraits)
Nombres et calculs

Introduction

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes… Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.

Attendus de fin de cycle :

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

- Comprendre et utiliser la notion de fractions simples.
  – Écritures fractionnaires.
  – Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions).
- Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.
  – Une première extension de la relation d'ordre.
- Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.
- Établir des égalités entre des fractions simples.
- Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal.
  – Spécificités des nombres décimaux.
- Associer diverses désignations d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule et décompositions).
  – Règles et fonctionnement des systèmes de numération dans le champ des nombres décimaux, relations entre unités de numération (point de vue décimal), valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal (point de vue positionnel).
- Repérer et placer des décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.
- Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres décimaux.
  – Ordre sur les nombres décimaux.

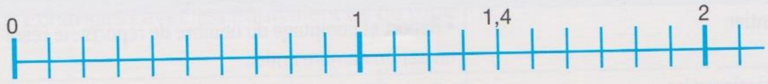
REPÈRES DE PROGRESSIVITÉ (extraits)

Les **fractions** sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux.

Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme 2/3 ; 1/4 ; 5/2) et des fractions décimales. Du CM1 à la Sixième, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en Sixième.

Pour les **nombres décimaux**, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en Sixième.

I- Typologie des problèmes pour **comprendre les fractions et les nombres décimaux** à l'école primaire

	Insuffisance des nombres entiers naturels	Apport des fractions et des nombres décimaux
Mesure	La mesure d'une grandeur à l'aide d'une unité donnée s'exprime rarement par un nombre entier. Si, par exemple, on mesure la largeur d'une table avec le côté d'une feuille de papier pour unité (u), le résultat sera compris entre $4u$ et $5u$, mais rarement $4u$ ou $5u$ exactement ! La solution qui consiste à utiliser plusieurs unités a longtemps prévalu et reste en vigueur pour les durées : 2 h 24 min 47 s.	L'idée de fractionner l'unité, éventuellement plusieurs fois, permet d'exprimer une mesure en n'utilisant qu'une seule unité. Par exemple, on peut plier la feuille qui sert d'unité u en 2, en 4, en 8..., puis exprimer la largeur de la table sous la forme $4u + \frac{3}{4}u$, qui donne une meilleure précision. Le fractionnement de l'unité en 10, puis en 100... conduit aux fractions décimales et aux nombres décimaux.
Graduation	Pour le repérage des points sur une ligne, les nombres entiers laissent beaucoup de « vides »...	L'idée, encore, de fractionner chaque intervalle (par exemple en 10 ou en 100...) permet de repérer de nouveaux points de cette ligne à l'aide d'un nombre décimal.
		
Calcul	Certains calculs n'aboutissent pas à une réponse satisfaisante avec les entiers naturels. C'est en particulier le cas de la division. Le quotient exact de 15 par 3 est un entier naturel (5), mais pas celui de 16 par 3. Avec les nombres entiers naturels, on ne peut obtenir qu'un quotient entier (3) et un reste (1).	Les fractions apportent une solution simple au problème de 16 divisé par 3 : le quotient exact est $\frac{16}{3}$! Et les nombres décimaux permettent d'en donner une approximation aussi bonne que l'on veut, par exemple : 5,3 ou 5,333.

1) Fractions et nombres décimaux pour exprimer une **mesure**

a) Introduction des fractions et nombres décimaux pour exprimer une mesure

Les fractions sont introduites en **CM1** comme des **outils pour exprimer et communiquer des mesures** (de longueur, d'aire…) **à partir d'une unité** (bande unité, surface unité), dans des cas où cette mesure ne s'exprime pas par un nombre entier d'unités.

Problème 1 : deux élèves disposent de la même bande unité. L'un des deux élèves doit permettre à l'autre de tracer un segment de même longueur que le segment [AB] qui est déjà tracé à l'aide de la bande unité (sans règle graduée).

Procédure de base : des élèves de CM1 ou CM2 vont chercher **combien de fois il est possible de reporter la bande unité sur le segment** [AB].

Variables didactiques :
- Rapport entre la longueur du segment et celle de la bande unité,
- Nombre de bandes-unités disponibles pour l'élève, le report étant plus facile à gérer lorsque les bandes unités peuvent être mises bout à bout,
- Possibilité de plier les bandes de différentes façons car la tâche est ainsi facilitée,
- Longueur de la bande unité : plus celle-ci est longue, plus les parts obtenues par partage en 2, 3, 4, ou 5 peuvent être distinguées les unes des autres.

Procédures possibles :

Variable didactique principale	Procédures
Rapport entier	Report et comptage du nombre de reports : le résultat est un nombre entier.
Rapport fractionnaire avec un dénominateur multiple simple de 2 (ex : 2 ou 4). Cas particulier : la longueur du segment est inférieure à celle de la bande-unité. Les élèves peuvent être déstabilisés dans la mesure où le report de l'unité entière est impossible. Cela remet en cause ce qu'ils avaient l'habitude de faire.	Report d'un nombre entier d'unités, puis report de la bande-unité pliée en 2 ou en 4 (pliage facile à imaginer et à réaliser). La longueur du segment peut être exprimée par : - 1u + 3/4u (3/4 signifiant qu'on a pris 3 fois le quart de l'unité), - 1u + 1/2u + 1/4u par report de l'unité, de la moitié de l'unité et de son quart. - 7/4u par report 7 fois du quart de l'unité.
Rapport fractionnaire avec un dénominateur simple mais non multiple de 2 (ex : 3 ou 5).	Même procédure que ci-dessus mais le partage en 3 ou en 5 est moins naturel et plus difficile à réaliser (surtout par pliage). Si le résultat est du type 2u + 1/2u + 2/3u, il peut être difficile de penser à un 2ème pliage et de le réaliser.
Rapport fractionnaire plus compliqué que les précédents ou rapport non fractionnaire.	Ce cas rend très difficile, voire impossible, la résolution du problème posé.

b) Passage des **fractions aux nombres décimaux**

Le travail sur les **fractions simples** (exprimées en demis, arts, huitièmes, tiers, sixièmes) est prolongé par une étude des **fractions décimales** (exprimées en dixièmes, centièmes), puis par celle des **nombres décimaux** exprimés par une écriture à **virgule**.

Ce passage nécessite l'apprentissage d'un **nouveau code**. *Ex : 43 + 2/10 + 5/1000 est codé 43,205.*
Il peut être facilité par le recours à **un tableau numérique**, la virgule sert à signaler quel chiffre est celui des unités.

Centaines	Dizaines	Unités ,	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
100	10	1	1/10	1/100	1/1000
	4	3	2	0	5

On retrouve alors les **principes de la numération décimale de position** (groupements par dix, échanges) avec des équivalences :

1 centième = 10 millièmes
1 dixième = 10 centièmes
1 unité = 10 dixièmes
1 dizaine = 10 unités
1 centaine = 10 dizaines

1 millième = 1/10 centième
1 centième = 1/10 dixième
1 dixième = 1/10 unité
1 unité = 1/10 dizaine
1 dizaine = 1/10 centaine

c) **Nombres décimaux et système métrique**

Les nombres décimaux, d'abord utilisés avec des unités de mesure non conventionnelles, permettent ensuite d'exprimer des **longueurs**, des **masses**, des **aires** et même des **durées** avec les **unités du système légal.**

Avant l'étude des nombres décimaux, les mesures étaient exprimées sous la forme d'expressions complexes avec plusieurs unités (*ex : 4 m 7 cm).* Désormais, les élèves peuvent coder ces mesures avec une seule unité (*ex : 4,07m).*

Mesure des longueurs : pour exprimer une longueur avec une seule unité, on utilise le fait que le système métrique usuel est fondé sur des **relations décimales entre les unités**.
1 cm = 1/100 m **1 dm = 1/10 m** **1 dam = 10 m**
Ex : 4m 7 cm = 4 m + 7/100 m = 4,07m

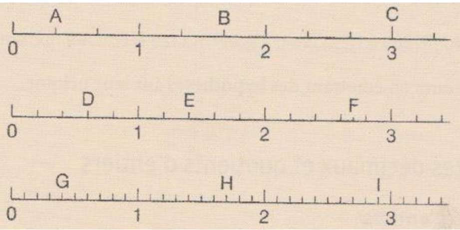
Mesure des aires : pour comprendre une expression comme 2,4m², il faut utiliser les égalités du type :
1 dm² = 1/100m² **1mm² = 1/100cm²**
Ex : 2,4m² = 2m² + 4/10m² OU 2,4m² = 2m² + 40/100 m². Soit 2m² et 40dm²

Mesure des durées : les relations entre unités ne sont pas liées à des puissances de 10.
Ex : 1h15 = 1h + ¼ h = 1,25h (cycle 3)/ 4min24s = 4min + 24/60min = 4min + 4/10min = 4,4min (cycle 4).

2) Fractions et nombres décimaux pour **repérer des points situés sur une droite**

Les fractions et les nombres décimaux permettent d'apporter des réponses à la question du **repérage des points sur une ligne graduée**, dans le prolongement de ce qui est fait avec les nombres entiers.

Problème 2 : L'enseignant propose aux élèves deux questions. 1) Déterminer les fractions associées aux repères D et E. 2) Placer sur la bonne ligne et à la bonne place le repère J correspondant à 3/2.



Procédures possibles : pour répondre aux deux questions, les élèves doivent **identifier la longueur unité** (qui correspond au segment joignant le repère 0 au repère 1 ou le repère 1 au repère 2) et le **type de partage de l'unité** (en tiers, en cinquièmes ou en dixièmes).
Pour la question 1, on peut par exemple associer au repère D les fractions 3/5 et 6/10, et au repère E les fractions 7/5 et 14/10 -> multitude de réponses possibles. Cela pose la question de la production et de la reconnaissance des fractions égales.
Pour la question 2, plusieurs procédures possibles aussi. Pour placer 3/2, l'élève peut utiliser le fait que 3/2 = 1 + ½, et choisir sur chacune des lignes, le repère situé au milieu du segment d'origine 1 et d'extrémité 2. Sur la 1ère et la 2ème ligne, il s'agira d'un nouveau repère alors que sur le 3ème ligne c'est le 5ème repère après le repère 1. Il aurait aussi été possible de déterminer que 3/2 = 15/10 et situer directement 3/2 sur la 3ème ligne.

NB : la 3ème ligne aurait pu être utilisée pour placer des nombres décimaux (ex : 0,4 pour G).

3) Fractions, nombres décimaux et quotients d'entiers

Fractions et quotients d'entiers :

- En primaire : la fraction $\frac{4}{3}$ est liée au fait qu'on a **reporté** 4 fois le tiers de l'unité. Donc les élèves, vont lire $\frac{4}{3}$ « quatre-tiers », ce sera pour eux **4 fois** $\frac{1}{3}$ ou encore $\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$.

- En $6^{ème}$: « trouver le nombre manquant pour que cette égalité soit vraie 3 x … = 4 ». Ils pensent à diviser 4 par 3, division qui ne se termine pas. La fraction $\frac{4}{3}$ est solution du problème. $\frac{4}{3}$ est alors vu comme quotient de 4 par 3 et donc comme « le tiers de 4 ». Donc **« 4 fois $\frac{1}{3}$ » est égal au « tiers de 4 ».** De plus, $\frac{4}{3}$ peut être approché par 1,3 ou 1,33 ou par 1,33333, etc.

Nombres décimaux et quotients d'entiers : en primaire, on peut avoir ce type de problèmes :
- Quelle est la longueur obtenue en partageant un fil de 132 m en 48 morceaux identiques ? -> Le quotient 2,75 est un nombre décimal.
- Quelle est la longueur obtenue en partageant 132 m en 46 morceaux identiques ? -> Le quotient (2,87) n'est pas un nombre décimal mais peut être approché au 1/10, au 1/100.

Les élèves comprennent que les nombres décimaux fournissent des **résultats aussi précis que l'on veut** pour la valeur du quotient.
L'idée **d'approximation décimale** est envisagée dans des cas particuliers au **cycle 3.**

II- Désignation des fractions et des nombres décimaux

La compréhension des fractions et des nombres décimaux suppose aussi celle des différents **moyens de les exprimer**.

1) Désignation des fractions

Compétences à acquérir : au **cycle 3,** les élèves doivent apprendre :
- Une **première signification de l'écriture fractionnaire** : $\frac{4}{3}$u est associé au report 4 fois d'une longueur obtenue en partageant en 3 l'unité initiale.
- La **lecture des fractions** :
  - Avec les mots « demi », « tiers », et « quart » lorsque le dénominateur est 2, 3 ou 4,
  - Avec des mots en « -ième » lorsque le dénominateur est différent de 2, 3 ou 4 ($\frac{7}{6}$ se lit sept sixièmes).
- **Le fait qu'une fraction peut être décomposée en partie entière et partie fractionnaire inférieure à 1** : $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$ car dans $\frac{8}{3}$ il y a 2 fois trois tiers (donc 2) et encore 2 tiers.

Erreurs fréquentes dans l'écriture des fractions :
- **Non-différenciation de $\frac{4}{3}$ et de $\frac{3}{4}$** : l'élève inverse la fonction du **dénominateur** (qui indique en combien de parts égales l'unité est partagée) et celle du **numérateur** (qui indique combien de parts sont reportées).
- **Impossibilité à donner du sens aux fractions supérieures à 1 :** souvent due à la situation choisie au départ de l'apprentissage (difficile de concevoir ce que peut représenter $\frac{4}{3}$ d'une tarte, qui en réalité ne peut être découpée qu'en 3 tiers).
- **Difficulté à concevoir que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$**, 4 et 6 étant supérieurs à 2 et 3, certains élèves pensent que $\frac{4}{6} > \frac{2}{3}$.

2) Désignation des nombres décimaux

Compétences à acquérir : au cycle 3, les élèves rencontrent **4 types d'expressions des nombres décimaux.**

- **<u>L'écriture décimale avec une virgule</u>** : permet aux élèves de comprendre que la **valeur d'un chiffre dépend de la position** qu'il occupe dans l'écriture et de maîtriser les relations qui existent entre des chiffres situés à des rangs différents, en particulier les relations avec l'unité. *Ex : dans 405,26, « 4 » représente 4 centaines d'unités, « 6 » représente 6 centièmes d'unit, « 2 » vaut « 100 fois moins » que s'il occupait la place de 0.*
- **<u>Les décompositions associées à cette écriture :</u>** 405,26 = 405 + 0,26 (partie entière + décimale) OU 405,26 = 4 x 100 + 5 + 2 x 0,1 + 6 x 0,1.
- **<u>Les écritures utilisant des fractions décimales</u>** : 405,26 = 405 + $\frac{26}{100}$ = 405 + $\frac{2}{10}$ + $\frac{6}{100}$ = 4 x 100 + 5 + $\frac{2}{10}$ + $\frac{6}{100}$ = $\frac{40\,526}{100}$
- **<u>Les désignations verbales</u>** :
  - En lecture courante : 405,26 est souvent lu « quatre-cent-cinq virgule vingt-six » -> ce type de lecture renforce certaines erreurs,
  - En **lecture signifiante** : 405,26 se lit « quatre-cent-cinq et vingt-six centièmes » ou « quatre-cent-cinq, deux dixièmes et six centièmes » (en lien avec les décompositions précédentes). Ce type de lecture doit être privilégié à l'école.

<u>Erreurs fréquentes dans l'écriture des nombres décimaux :</u>

- **Confusion entre écriture décimale et écriture fractionnaire.** *Ex : exercice proposé à des CM2 -> 2, 10 / 0,2 / 0,02 / 20,00 / 2,0 / 2,00 « Entoure l'écriture décimale égale à la fraction 2/10 ».* La moitié des élèves répondent de manière erronée, souvent par l'écriture « 2,10 ». Pour ces élèves, **l'écriture fractionnaire, comme l'écriture décimale, signale seulement une séparation entre deux nombres entiers**, d'où l'égalité 2/10 = 2,10.

- **Ecriture décimale conçue comme représentant deux nombres entiers séparés par une virgule** : *ex : 1,8 + 2,6 = 3,14 (#4,4).* Les élèves traitent séparément les nombres entiers avant la virgule et ceux qui sont après la virgule. Les lectures « un virgule huit » et « deux virgule six » renforcent cette conception erronée.

- **Mauvaise maîtrise de la signification des chiffres d'une écriture à virgule en fonction du rang qu'ils occupent**. *Ex : confusion entre les mots dixièmes et dizaines.* Les élèves imaginent une **symétrie** de ces termes par rapport à la virgule. Ainsi, dans 754,61, le chiffre 1 est déclaré chiffre des dixièmes, les élèves estimant que si dizaine correspond à 2 chiffres avant la virgule alors dixième correspond à 2 chiffres après la virgule.

- **Les mots dizaine, dixième … désignent des rangs plus que des valeurs** : dixième est correctement associé au 1er chiffre à droite de la virgule, mais sa valeur n'est pas reconnue comme associée à ce qu'on obtient en partageant l'unité en dix.

III- <u>Techniques de comparaison des fractions et des nombres décimaux</u>

Plusieurs techniques sont enseignées aux élèves (comparer des nombres décimaux, intercaler des nombres entre deux autres, multiplier un nombre par 10, 100 …). Ici on s'intéresse à la question de la comparaison des fractions et celle de la comparaison des nombres décimaux.

1) <u>Comparaison de fractions (qu'au cycle 3)</u>

Envisagée qu'au cycle 3, pour des cas simples avec des fractions de même dénominateur ou pouvant s'y ramener facilement :

- $\frac{5}{4}$ **plus grand que** $\frac{3}{4}$: lecture « cinq quarts » et « trois quarts » permettent de conclure.
- $\frac{5}{4}$ **est supérieur à 1** : les élèves doivent s'appuyer sur « il faut 4 quarts pour faire 1 ».
- $\frac{3}{2}$ **égal à** $\frac{6}{4}$ **:** nécessite un raisonnement -> un quart est obtenu en partageant un demi en deux, et chaque demi donne deux quarts, donc 3 demis donnent 6 quarts. Les élèves doivent dépasser l'idée initiale que $\frac{6}{4}$ est supérieur à $\frac{3}{2}$.

Pour toutes ces compétences, le recours à des représentations des fractions par des **longueurs** ou des **aires** est une aide précieuse, de même que le placement des fractions sur une **droite graduée**.

2) Comparaison de nombres décimaux

Algorithmes de comparaison : la comparaison des nombres décimaux occupe une place importante au **cycle 3**. Les élèves apprennent un algorithme de comparaison de ces nombres exprimés à l'aide d'une **écriture à virgule** en étant placés dans des situations qui les conduisent à comprendre et à justifier les procédures utilisées.

Problème 3 : on propose à des élèves de CM cet exercice -> « Comparer les nombres décimaux suivants : 2,038 0,54 2,17 2,05 ».

A partir de cet exercice, **3 procédures** peuvent être enseignées :
- Procédure 1 : considérer la valeur de chaque chiffre en **partant du chiffre de plus grande valeur** (ex : placer les nombres les uns sous les autres). -> Les nombres qui ont 2 pour chiffre des unités sont plus grands que 0,54. 2,17 est plus grand que les autres car son chiffre des dixièmes est plus grand que 0 etc.
- Procédure 2 : comparer d'abord les **parties entières**. Si elles sont différentes, on peut conclure, sinon deux démarches sont possibles :
  - Mettre les **parties décimales « au même format »,** ici en les écrivant toutes avec 3 chiffres à droite de la virgule (2,050 et 2,170).
  - **Examiner successivement chaque chiffre situé à droite de la virgule**.

La procédure 1 est préférable aux deux autres car il ne ramène pas la comparaison de décimaux à la comparaison d'entiers (qui est source d'erreurs).

Erreurs relatives à la comparaison de nombres décimaux : fréquentes au cycle 3.
- Ex A : « réécris dans les cases les quatre nombres du plus petit au plus grand : 19,9 19,19 991 9,191. » -> 58% répondent juste à l'entrée en 6ème, 4% écrivent 19,9 avant 19,19.
- Ex B : « en utilisant un nombre de la liste suivante : 3,12 / 3,092 / 3,1 / 3,0108, complète : 3 < … < 3,09. » -> 40% des élèves font correctement avec 3,0108. 33% donnent 3,1 comme réponse.

Hypothèses sur ces difficultés :
- **Non-prise en compte de la virgule** : pour l'élève, le nombre le plus grand est celui qui est écrit avec le plus de chiffres (comme pour les nombres entiers). Ex A : 19,19 > 19,9 car le 1er nombre a plus de chiffres. Ex B : 3 < 3,1 < 3,09.
- **Tout nombre possède un successeur**. Ex B : l'élève considère que 3,1 est un nombre qui vient « après 3 ».

- **Entre un nombre entier (aucun chiffre après la virgule) et un nombre écrit avec deux chiffres après la virgule, on ne peut placer qu'un nombre qui a un chiffre après la virgule**. Ex B : « < 3,1 < 3,09.
- **« Plus on se déplace vers la droite, plus les chiffres ont une valeur faible » :** l'élève en déduit que si on écrit d'autres chiffres à droite, on obtient un nombre plus petit. Ex B : 3,092 est plus petit que 3,09.

<u>Conclusion :</u>

- **Toutes ces difficultés** (et celles relatives au calcul sur les nombres décimaux évoquées dans les chapitres 10 et 11**) sont révélatrices des conceptions que les élèves se sont forgées à propos des nombres décimaux**, dans le prolongement de leurs connaissances sur les naturels. Pour de nombreux élèves, un nombre décimal est pensé, à partir des écritures à virgule, comme deux nombres naturels autonomes séparés par une virgule, voire comme un seul naturel muni d'une virgule. Cette conception est renforcée par le fait que parfois « ces théorèmes élèves » produisent des résultats corrects. Ex : la procédure erronée des hypothèses 1 et 2 aboutit à une réponse correcte pour comparer 4,3 et 4,5.

- **Ces difficultés sont aussi entretenues par les lectures courantes** du type « deux virgule cinq », au lieu de « deux et cinq dixièmes », et par la signification de la virgule dans les textes.

- Ces **conceptions erronées** peuvent avoir :
  - Une <u>origine de type épistémologique</u> dans la mesure où les **élèves prolongent naturellement sur les nombres décimaux certaines propriétés des entiers**.
  - Une <u>origine de type didactique</u> provenant des **choix des PE**. Ex : pour introduire les nombres décimaux, le PE peut les présenter comme un autre moyen de coder des mesures s'exprimant avec plusieurs unités (3 m 14 cm = 3,14m). Cela peut induire chez les élèves le prolongement sur les décimaux des propriétés des nombres entiers (dans 3 m 14 cm, 3 et 4 sont des nombres entiers).