Chapitre 12 : calcul littéral, équations, inéquations

I- Calcul littéral

Une expression littérale est une expression qui contient une ou plusieurs lettres.

1) Egalité de deux expressions littérales

Deux **expressions littérales sont égales** si elles donnent le **même résultat quelle que soit la valeur numérique** attribuée à chacune des lettres qui figurent dans ces expressions.
S'il y a une seule valeur pour lesquelles deux expressions donnent des résultats différents, alors elles ne sont pas égales.

Trois types d'expressions littérales :

- **Somme** : si la dernière opération à effectuer est une somme ou une différence (en respectant les règles de priorité),
- **Produit** : si la dernière opération à effectuer est un produit,
- **Quotient** : si la dernière opération à effecteur est un quotient. Elle est souvent exprimée sous forme fractionnaire.

2) Développer et réduire des expressions littérales

Réduire (ou simplifier) une expression littérale = l'écrire avec le **moins de termes possibles**.
Développer une expression littérale = l'écrire sous la forme d'une **somme d'expressions simples**.

Propriétés utilisées :

- **Propriété de distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition :

$$a\,(b + c) = ab + ac$$
$$-\,(a + b) = -\,a - b$$
$$-\,(a - b) = -\,a + b$$

(On distribue le signe – qui représente le nombre -1).

- **Propriété de double distributivité** :

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

3) Factoriser des expressions littérales

Factoriser une expression littérale = l'écrire sous la forme d'un **produit**. On utilise les propriétés ci-dessus mais dans l'autre sens. On cherche à mettre en évidence un facteur commun ou une identité remarquable.

4) Calcul littéral et démonstration

Les **règles du débat mathématique** permettent de gérer le « vrai » et le « faux » :
- Un énoncé mathématique ne peut-être à la fois vrai et faux,
- Des exemples même nombreux qui vérifient un énoncé ne prouvent pas que l'énoncé est vrai,
- Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux (contre-exemple).
- En géométrie : une constatation ou une mesure sur un dessin ne permet pas de prouver qu'un énoncé est vrai.

Pour démontrer qu'un énoncé numérique est vrai, on utilise le calcul littéral. Pour un énoncé de géométrie, on s'appuie sur les propriétés de géométrie.

Conjecture : énoncé mathématique qui semble vrai mais qu'on n'a pas encore démontré.

II- Equations

Une équation est une égalité conditionnelle contenant une ou plusieurs **inconnues** représentées par des **lettres**.
Il ne faut pas confondre « identité » qui est une égalité vraie quelles que soient les valeurs données aux lettres, et une « équation » qui est une égalité qui n'est pas nécessairement vraie pour toutes les valeurs.

1) Résolution d'équations

Solutions de l'équation : ce sont les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'équation.
Résoudre une équation c'est trouver l'ensemble de ces solutions (cet ensemble peut être vide).

Deux **équations sont équivalentes** si elles ont le **même ensemble de solutions**.

Propriétés pour rendre une équation équivalente à une équation donnée :
- Simplifier chacun des membres, par développement ou factorisation,
- Ajouter ou retrancher aux deux membres une même expression algébrique,
- Multiplier ou diviser ses deux membres par un même nombre non nul.

Equations du premier degré à une inconnue :

Equation équivalente à une équation de la forme **ax = b** où **x** est l'inconnue, et a et b deux nombres réels.

Fiche méthode : résoudre une équation de la forme ax = b
- Trouver une équation équivalente de la forme ax = b.
- Résolution de l'équation b obtenue :
    - Si **a ≠ 0**, l'équation ne possède **qu'une seule solution : $\frac{b}{a}$.**
    - Si **a = 0 et b ≠ 0,** l'équation n'a **pas de solution**.
    - Si **a = 0 et b = 0, tout nombre réel est solution de l'équation**.

<u>Ex</u> : Résoudre l'équation 4(2 + x) = 7 – 2x.
4(2 + x) = 7 – 2x
8 + 4x = 7 – 2x
8 + 6x = 7
6x = 1
Le coefficient de x est différent de 0. On peut donc diviser les deux membres de l'équation par 6.
X = - $\frac{1}{6}$. L'équation de départ a pour solution : - $\frac{1}{6}$.

2) Equation produit

On appelle **équation produit** toute équation équivalente à une équation de la forme :

(ax + b) (cx + d) = 0

Quels que soient les nombres a et b, **ab = 0** équivaut à **a = 0** ou **b = 0.**

3) Résoudre un problème par une mise en équation

<u>Fiche méthode : mettre un problème en équation</u>.

- Choisir les inconnues,
- Traduire les informations fournies par des égalités ou des inégalités où figurent les inconnues (on obtient des équations ou inéquations),
- Résoudre l'équation,
- Conclure en interprétant les résultats obtenus dans le langage de la situation.

Ex : Lucette pense à un nombre. Elle lui ajoute 3 et multiplie le résultat obtenu par 3. Jeanne pense au même nombre que Lucette. Elle l'ajoute à 8. Toutes deux trouvent le même résultat. Quel est le nombre auquel elles ont pensé ?
→ On choisit comme inconnue le nombre auquel pense Lucette. On l'appelle x.
→ Lucette ajoute 3 au nombre de départ donc on obtient $x + 3$
→ Elle multiplie le nombre obtenu par 3, donc on obtient : $(x + 3) \times 3$
→ Jeanne choisit le même nombre x au départ. Elle lui ajoute 8. On obtient $x + 8$
→ Le nombre trouvé par Lucette et celui trouvé par Jeanne sont égaux. On en déduit l'égalité suivante : $(x + 3) \times 3 = x + 8$
→ Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation :
$(x + 3) \times 3 = x + 8$
$3x + 9 = x + 8$
$3x - x = 8 - 9$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$
→ $x = -\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation. C'est le nombre que Lucette et Jeanne ont choisi.

4) Systèmes de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

Un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues est un système qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

Un couple de deux nombres qui vérifie simultanément les deux équations d'un système est une **solution de ce système**.

Ex : le couple (1 ; 2) est solution du système :
3x + 2y = 7
- x + 3y = 5

Le 1[er] terme du couple correspond à la valeur de x et le 2[ème] terme à la valeur de y.

Fiches méthode : résoudre un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

Méthode 1 : par substitution
- Tirer y de la 1[ère] équation,
- Remplacer y par son expression en fonction de x dans la 2[nde] équation,
- Chercher l'inconnue x,
- Chercher l'inconnue y.

Méthode 2 : par combinaison
- Chercher à égaliser les coefficients de y dans les deux équations,
- Chercher à supprimer l'inconnue de y,
- Chercher l'inconnue x,
- Chercher l'inconnue y.

Ex : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

Méthode 1

→ $2x + y = 3$, donc $y = 3 - 2x$

→ On obtient : $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x + 2(3 - 2x) = -5 \end{cases}$. Développée, cette équation est égale à $-x + 6 = -5$.

→ On obtient : $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ -x + 6 = -5 \end{cases}$. On en déduit que $x = 11$

→ Si $x = 11$, alors il suffit de remplacer x dans la première équation pour trouver y.

→ $2 \times 11 + y = 3$, donc $22 + y = 3$. On en déduit que $y = 3 - 22$, soit -19.

→ **Le système a pour solution le couple (11 ; – 19).**

Méthode 2

→ On égalise les coefficients de y : $\begin{cases} 2x + y = 3 & \rightarrow -4x - 2y = -6 \\ 3x + 2y = -5 & \rightarrow \quad 3x + 2y = -5 \end{cases}$

→ On additionne les deux équations membres à membres. On obtient : $-x = -11$, donc $x = 11$.

→ La suite de la résolution est la même que dans l'exercice précédent.

Méthode 3 : résolution avec le graphique
- Tracer dans un repère les deux droites qui ont pour équation chacune des deux équations données, en les ramenant à la forme y = ax + b,
- Lire les coordonnées du point d'intersection s'il existe,
- Vérifier que les coordonnées trouvées sont bien solution du système.

Cette méthode permet souvent d'obtenir qu'une valeur approchée des solutions.

III- Inéquations

Une **inéquation est une inégalité conditionnelle** contenant une ou plusieurs **inconnues** représentées par des **lettres**. Résoudre l'inéquation revient à déterminer les **valeurs** que peut prendre l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie. Ce sont les **solutions de l'inéquation**.

On appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** toute inéquation qui est équivalente à une inéquation de la forme :

$$ax < b \qquad ax \leq b \qquad ax > b \qquad ax \geq b$$

Il faut ramener une inéquation à l'une des formes précédentes. Pour cela, il existe 4 règles pour obtenir une inéquation équivalente à une inéquation donnée :

- Simplifier chacun des membres,
- Ajouter ou retrancher aux deux membres une même expression,
- Multiplier ou diviser ses deux membres par un même nombre positif,
- Multiplier ou diviser ses deux membres par un même nombre négatif, à condition de changer le sens de l'inégalité.

Ex : $3x - 6 < 7x + 2$
$3x - 6 - 7x < 2$
$-4x - 6 < 2$
$-4x < 8$
$x > -2$
(On change de sens car on divise les deux membres par – 4).
Tous les nombres réels strictement supérieurs à 6 2 sont solutions.
Donc on a l'intervalle de solution qui est :
Le crochet est ouvert car -2 est exclu (il n'est pas solution).