

Chap 16 – Fiche méthode des démonstrations fréquemment demandées

Principales propriétés pour quatre démonstrations les plus fréquemment demandées au concours :

- Démontrer que **deux droites sont perpendiculaires** ou **qu'un triangle est rectangle**,
- Démontrer que **deux droites sont parallèles**,
- Démontrer qu'**un point est le milieu d'un segment**,
- Démontrer que **trois points sont alignés**.

1) Démontrer que deux droites sont perpendiculaires ou qu'un triangle est rectangle

On peut utiliser ces propriétés :

- **Droite** : Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
- **Triangle** :
 - Si dans un triangle la longueur de la médiane issue d'un sommet est égale à la moitié de la longueur du côté opposé alors le triangle est rectangle en ce sommet.
 - Si une droite passe par un sommet et par l'orthocentre d'un triangle (point de concours de deux hauteurs) alors elle est perpendiculaire au côté du triangle opposé à ce sommet.
 - Si dans un triangle le carré de la longueur d'un côté (le plus grand) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle (réciproque du Théorème de Pythagore).
- **Médiatrice** : Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
- **Rectangle** : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux, sont de même longueur et ses quatre angles sont droits.
- **Losange** : Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
- **Cercle** : Si dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point du cercle alors ce triangle est rectangle en ce point.
- **Carré** : Si un quadrilatère est un carré alors il a quatre côtés de même longueur, quatre angles droits et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

NB : les symétries centrales et axiales, les translations, les rotations, les homothéties conservent les angles (entre autres les angles droits) (*cf chap 19*).

2) Démontrer que deux droites sont parallèles

On peut utiliser ces propriétés :

- **Droite :**
 - Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
 - Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
- **Triangle :**
 - Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
 - Réciproque du théorème de Thalès (*cf chap 17*).
- **Parallélogramme :** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés sont parallèles deux à deux.
- **Losange :** Si un quadrilatère est un losange alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et ses quatre côtés sont de même longueur.
- **Rectangle :** Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux, sont de même longueur et ses quatre angles sont droits.
- **Carré :** Si un quadrilatère est un carré alors il a quatre côtés de même longueur, quatre angles droits et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- **Angle :** Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants ou alternes-internes égaux alors ces deux droites sont parallèles.

NB : les symétries centrales et axiales, les translations, les rotations, les homothéties conservent le parallélisme. L'image d'une droite (d) par une symétrie axiale, une homothétie est une droite (d') parallèle à (d).

3) Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

On peut utiliser ces propriétés :

- **Définition du milieu :** Si I, A et B sont alignés et si $AI = IB$ alors I est le milieu de [AB].
- **Médiatrice :** Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.
- **Triangle :**
 - Si un triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypoténuse.
 - Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite passe par le milieu du troisième côté du triangle.

- Si une droite passe par un sommet et par le centre de gravité d'un triangle (point de concours de deux médianes) alors elle coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.
- Si un triangle est isocèle alors la hauteur (respectivement médiane) issue du sommet principal est aussi une médiane (respectivement hauteur) et une médiatrice.
- **Parallélogramme** : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.
- **Losange** : Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
- **Rectangle** : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont le même milieu et sont de même longueur.
- **Carré** : Si un quadrilatère est un carré alors il a des diagonales qui ont le même milieu, sont perpendiculaires et sont de même longueur.

NB :

- **Définition du symétrique d'un point** : Si M' est le symétrique de M par rapport à I alors I est le milieu de $[MM']$.
- Les symétries centrales et axiales, les translations, les rotations, les homothéties conservent le milieu d'un segment.

4) Démontrer que trois points sont alignés

On peut utiliser ces propriétés :

- **Droite** :
 - Si $AC + CB = AB$, alors A , C et B sont alignés.
 - Si (AB) et (AC) sont parallèles alors les points A , B et C sont alignés.
- **Autre** :
 - Si l'angle formé par trois points est plat alors ces trois points sont alignés.
 - Si un point est le milieu d'un segment alors il est aligné avec les extrémités de ce segment.
 - Si trois points appartiennent à la médiane ou bissectrice d'un triangle ou à la médiatrice d'un segment alors les points sont alignés.
 - Si un point A est l'image de B par une symétrie (ou une homothétie) de centre O alors A , O et B sont alignés.