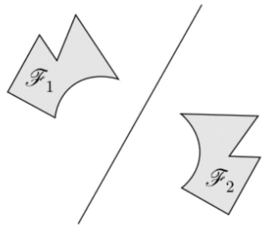
Chapitre 19 : Transformations

Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même. Cela signifie que c'est un procédé qui, à tout point M du plan, associe un point M' et un seul. On dit que **M' est l'image de M par la transformation**.

Deux transformations du plan : **les symétries axiale et centrale**.

I- Symétrie axiale (ou symétrie orthogonale par rapport à une droite)



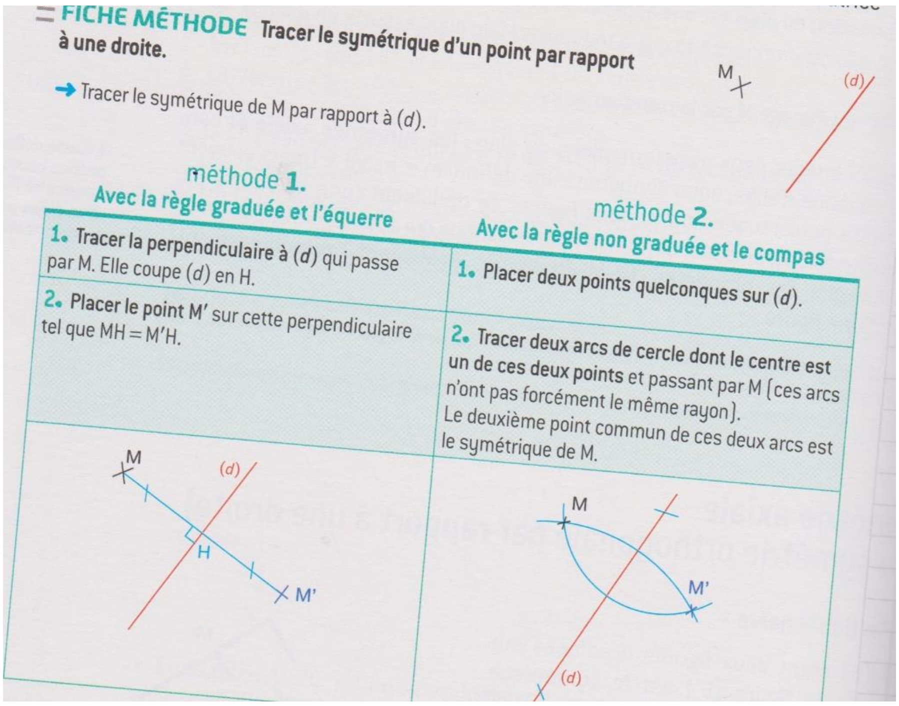
Définition naïve : deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) si, lorsqu'on plie la feuille suivant (d), les deux figures **se superposent** (par exemple par transparence).

Définition mathématique : **Le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) est :**

- **Le point M' tel que (d) soit la médiatrice de [MM'], si M n'est pas sur (d),**
- **Le point M lui-même, si M est sur (d).**

Remarques :

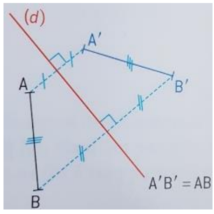
- **M' est l'image de M par la symétrie par rapport à la droite (d)** (ou l'axe (d)). M est aussi le symétrique de M' par rapport à (d).
- **M et M' sont symétriques par rapport à (d).**
- **Tous les points de l'axe de symétrie sont leur propre image** : ils sont **invariants**.
- Le symétrique d'une figure (F) par rapport à une droite (d) est l'ensemble (F').


FICHE MÉTHODE Tracer le symétrique d'un point par rapport à une droite.

→ Tracer le symétrique de M par rapport à (d).

méthode 1. Avec la règle graduée et l'équerre	méthode 2. Avec la règle non graduée et le compas
1. Tracer la perpendiculaire à (d) qui passe par M. Elle coupe (d) en H.	1. Placer deux points quelconques sur (d).
2. Placer le point M' sur cette perpendiculaire tel que MH = M'H.	2. Tracer deux arcs de cercle dont le centre est un de ces deux points et passant par M (ces arcs n'ont pas forcément le même rayon). Le deuxième point commun de ces deux arcs est le symétrique de M.

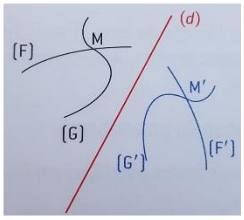
1) <u>Propriétés de la symétrie axiale</u>



- **Conservation de l'alignement** : l'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite,
- **Conservation des longueurs** : l'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur,
- **Conservation du milieu** : l'image du milieu d'un segment par une symétrie axiale est le milieu de l'image de ce segment,
- **Conservation des angles** : l'image d'un angle par une symétrie axiale est un angle de même mesure,
- **Conservation du parallélisme** : l'image de deux droites parallèles par une symétrie axiale est formée de deux droites parallèles.

Attention ! L'image d'une droite par une symétrie axiale n'est pas une droite parallèle (sauf si la droite est parallèle à l'axe), contrairement à ce qui se passe pour la symétrie centrale.

Ces propriétés permettent de :
- Dire que le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est le symétrique du centre,
- Tracer le symétrique d'une figure (analyse de la figure puis trace symétrique de ces figures),
- **Déterminer le symétrique d'un point** : si un point est le seul point d'intersection de deux figures (F) et (G) dont on connait les symétriques alors le symétrique de ce point est l'intersection des symétriques de (F) et (G).

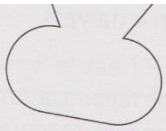


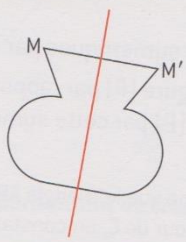
2) <u>Axe(s) de symétrie</u>

Une figure (F) admet un axe de symétrie (d) si le symétrique de tout point de (F) par rapport à (d) appartient à (F).

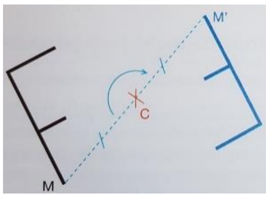
FICHE MÉTHODE Chercher le(s) axe(s) de symétrie d'une figure.

➜ Chercher un axe de symétrie de la figure ci-contre.



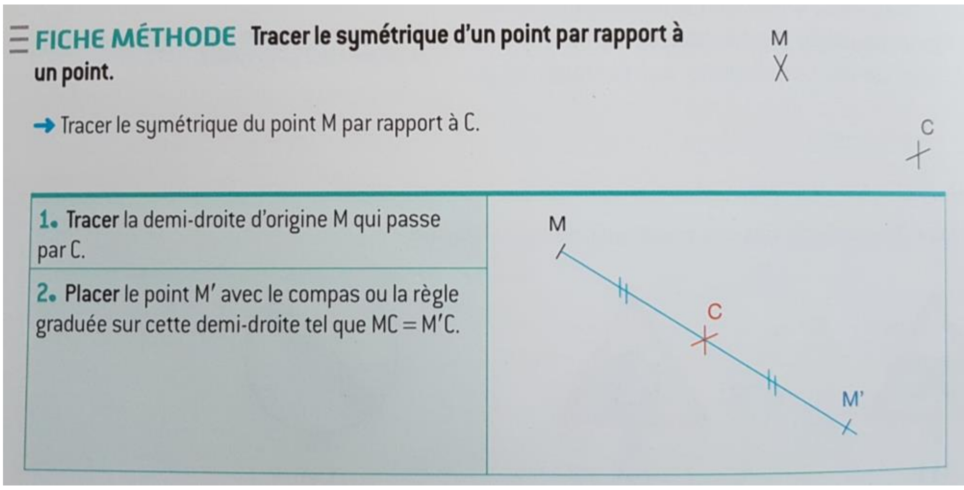
1. Plier mentalement la figure suivant une droite de façon à ce que les deux parties de la figure délimitées par le pli se superposent (on peut aussi faire cette recherche mentale avec un miroir) : – **Si ce n'est pas possible**, on peut penser que la figure n'a pas d'axe de symétrie. – **Si c'est possible**, passer à l'étape suivante.	Plier mentalement la figure suivant la médiatrice du segment en haut de la figure. Il semble que les deux parties de la figure ainsi délimitées se superposent.
2. Repérer deux points M et M' de la figure comme étant symétriques et tracer la médiatrice de [MM'].	On trace la médiatrice de [MM'] : 
3. S'assurer que cette droite est bien un axe de symétrie, par exemple en pliant mentalement (ou réellement si c'est possible) la figure suivant cet axe.	Cette figure n'a qu'un seul axe de symétrie, c'est la médiatrice de [MM'].
4. Essayer de trouver d'autres axes en procédant comme ci-dessus.	

II- Symétrie centrale (ou symétrie par rapport à un point)



Définition naïve : Deux figures sont symétriques par rapport à **un point C** si on obtient la 2$^{\text{ème}}$ en faisant **tourner la 1$^{\text{ère}}$ de 180° (un demi-tour) autour de C.**

Définition mathématique : **le symétrique d'un point M par rapport à C est :**
- **Le point M' tel que C soit le milieu de [MM'], si M est distinct de C,**
- **Le point M lui-même si M et C sont confondus**.



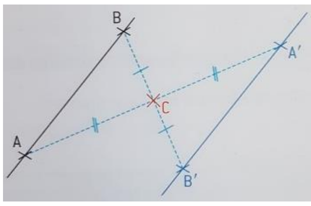
FICHE MÉTHODE Tracer le symétrique d'un point par rapport à un point.

→ Tracer le symétrique du point M par rapport à C.

1. Tracer la demi-droite d'origine M qui passe par C.	
2. Placer le point M' avec le compas ou la règle graduée sur cette demi-droite tel que MC = M'C.	

1) Propriétés de la symétrie centrale

La symétrie centrale conserve l'alignement, les longueurs, les angles l'orthogonalité, les milieux, le parallélisme.



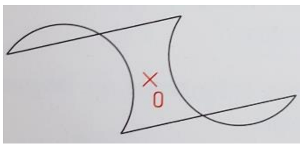
Quelle que soit la droite, la symétrie centrale transforme cette droite en une droite parallèle.

2) Centre de symétrie

Une figure (F) admet un centre de symétrie C si le symétrique de tout point de (F) appartient à (F).

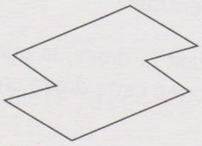
Si une figure, dont certains côtés sont des segments, admet un centre de symétrie, alors nécessairement ces segments sont parallèles deux à deux.

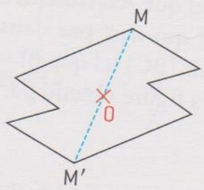
➔ Donc, si un polygone n'a pas des côtés parallèles deux à deux, il n'a pas de centre de symétrie !



FICHE MÉTHODE **Chercher le centre de symétrie d'une figure.**

➜ Chercher un centre de symétrie de la figure ci-contre.



1. Si des segments composent la figure, **ces segments sont-ils parallèles deux à deux ?** – **Si ce n'est pas le cas,** on peut affirmer que la figure n'a pas de centre de symétrie. – **Si c'est le cas,** on passe à l'étape suivante.	Les segments qui composent cette figure sont parallèles deux à deux.
2. Déterminer mentalement un point qui semble être le centre de symétrie de la figure. Ce peut être un point « central » de la figure ou l'intersection de segments reliant des couples de points qui devraient être deux à deux symétriques.	Si la figure possède un centre de symétrie, les points M et M′ devraient être symétriques. Leur milieu pourrait être le centre de symétrie de cette figure. 
3. Tracer le point central avec précision.	Tracer le milieu O de [MM′].
4. Vérifier mentalement que ce point est bien le centre de symétrie de la figure en imaginant de faire tourner de 180° la figure autour de ce point.	Constater mentalement que O est le centre de symétrie de la figure.

Attention !

- Les diagonales d'un rectangle ne sont pas des axes de symétrie,
- Le point de concours des médiatrices d'un triangle équilatéral n'est pas un centre de symétrie,
- Les diagonales du parallélogramme ne sont pas des axes de symétrie.

III- Agrandissement et réduction d'une figure

Un polygone F' est un agrandissement ou une réduction d'un polygone F si les dimensions de ses côtés ont été multipliées par un même coefficient (réel et positif) et que les angles sont conservés. Si le coefficient est **supérieur à 1,** on obtient un **agrandissement**. Si le coefficient est **inférieur à 1,** on obtient une **réduction**.

Si on multiplie les dimensions d'un triangle par un même coefficient, on obtient un triangle qui est un agrandissement ou une réduction du triangle de départ. Les angles sont automatiquement conservés. Ce n'est pas le cas pour un polygone autre qu'un triangle.

1) Propriétés d'un agrandissement et d'une réduction

L'agrandissement ou la réduction conserve l'alignement, les angles (donc la perpendicularité), le parallélisme, l'égalité de longueurs, le milieu d'un segment.

On retrouve également les conséquences des **propriétés de linéarité de la proportionnalité** :

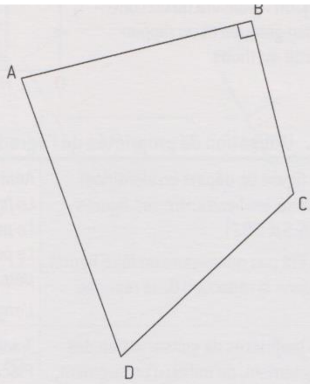
- Si dans la figure, un **côté est la somme de deux autres côtés** alors il en est de même de leurs agrandissements / réductions respectifs.

- Si dans la figure, un côté est **k fois plus long qu'un autre côté** (k étant un nombre réel) alors il en est de même de leurs agrandissements / réductions respectifs.

2) <u>Fiche méthode</u>

FICHE MÉTHODE Construire l'agrandissement ou la réduction d'une figure.

→ **Exemple 1 :** Construire la réduction de ce quadrilatère sachant que le côté correspondant à AB doit mesurer 2 cm sur la réduction.

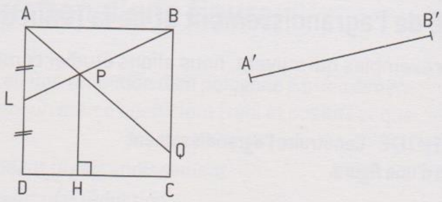


méthode 1. Utilisation de la définition

1. Déterminer le coefficient d'agrandissement ou de réduction s'il n'est pas connu. Pour cela on divise la mesure d'un côté de la figure agrandie ou réduite par la mesure du côté correspondant de la figure donnée.	Calcul du coefficient de réduction : $\frac{2}{4}=0{,}5$
2. Calculer les mesures des côtés nécessaires à la construction de l'agrandissement ou de la réduction en mesurant les côtés correspondants de la figure d'origine et en multipliant ces mesures par le coefficient de proportionnalité calculé ci-dessus. <u>Remarque :</u> Si ce coefficient est « compliqué » (nombre rationnel non décimal par exemple), il est parfois plus simple, pour calculer les mesures des côtés de l'agrandissement ou de la réduction, d'appliquer les propriétés additive et multiplicative de la linéarité (*voir le corrigé de l'entrainement 16 p. 419*).	Il faut donc multiplier toutes les dimensions par 0,5 : A'B' = 2 cm B'C' = 1,5 cm C'D' = 2 cm A'D' = 2,5 cm
3. Mesurer les angles nécessaires à la construction du quadrilatère.	$\widehat{ABC} = 90°$, donc $\widehat{A'B'C'} = 90°$.
4. Construire la figure agrandie.	• Tracer [A'B'] puis la perpendiculaire à (A'B') qui passe par B'. • Placer le point C' tel que B'C' = 1,5 cm. • Placer D' avec le compas tel que : A'D' = 2,5 cm et C'D' = 2 cm.

Il y a évidemment plusieurs possibilités pour construire cette figure. On peut ne pas utiliser les angles en traçant une diagonale de ce quadrilatère, la mesurer, puis appliquer à cette mesure le coefficient d'agrandissement ou de réduction pour déterminer la mesure de la diagonale correspondante de la figure agrandie ou réduite.

➜ **Exemple 2 :** Décrire une méthode pour construire un agrandissement de la figure ci-contre sachant que le côté correspondant à [AB] est [A'B']. On n'utilisera qu'un compas, une règle non graduée et un rapporteur. Justifier cette méthode.



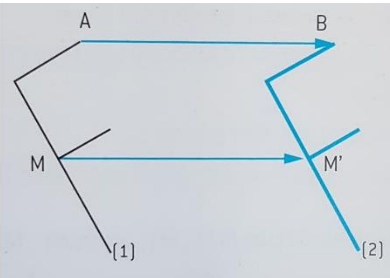
méthode 2. Utilisation de propriétés de l'agrandissement ou de la réduction

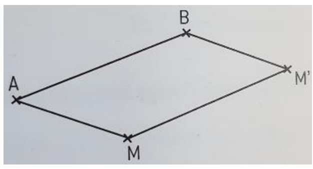
1. Analyser la figure de départ en identifiant les figures de base, les liens entre ses figures (*voir chap. 13, § 5 p. 292*). Remarque : Il n'est pas nécessaire de faire figurer cette analyse dans la rédaction de la réponse.	**Analyse de la figure :** *La figure est constituée d'un carré et de segments.* *Le point L est le milieu du segment [AD].* *Le point H est l'intersection de (DC) avec la droite perpendiculaire à (DC) qui passe par P.* *L'angle $\widehat{BAQ}$ mesure 40°.*
2. Utiliser les propriétés de conservation des angles, de l'alignement, du milieu d'un segment, de la perpendicularité, du parallélisme par un agrandissement ou une réduction.	Tracer un carré A'B'C'D'. Placer le point L' milieu de [A'D']. Tracer [B'L']. Placer le point Q' sur [B'C'], tel que $\widehat{B'A'Q'} = 40°$. Soit P' l'intersection de [A'Q'] et [B'L']. Tracer la perpendiculaire à (D'C') qui passe par P', elle coupe [C'D'] en H'. Propriétés utilisées : Un agrandissement conserve les angles, la perpendicularité, les milieux.

IV- <u>Translation</u>

<u>Définition naïve</u> : Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une translation s'il est possible, en faisant **glisser** (F) sans la faire tourner (par exemple avec un papier calque), de la faire coïncider avec (F').

Ex : sur le dessin, la figure 2 est l'image de la figure 1 par la translation qui transforme A en B.





<u>Définition mathématique</u> : **Etant donné deux points A et B, on appelle translation dont l'image de A est B l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme.**
Attention à l'ordre des sommets du parallélogramme !

<u>Propriétés de la translation</u> :
- La translation **conserve l'alignement, les longueurs, les milieux, les angles, le parallélisme**.
- **L'image d'une droite est une droite parallèle**.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre.

V- Rotation

Pour définir une rotation, il faut définir le sens de rotation.

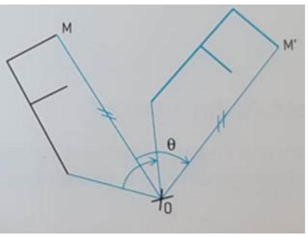
- **Sens direct** : tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre -> angle de sens direct : mesure de l'angle est **positive**,
- **Sens indirect** : tourne dans le sens des aiguilles d'une montre -> angle de sens indirect : mesure de l'angle est **négative**.

On parle d'un angle de +45° (noté simplement 45°) ou -45°.

Définition naïve :

5. 1 Définition « naïve »

Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une rotation de centre C et d'angle θ de sens direct (ou indirect) si, lorsqu'on fait tourner la figure (F) d'un angle θ de sens direct (ou indirect) autour de C, alors elle se superpose avec (F').



Définition mathématique :

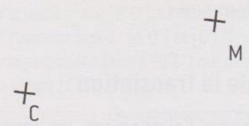
Étant donné un angle θ (de sens direct ou indirect) et un point C, l'image du point M par la rotation de centre C et d'angle θ est :
– le point M' tel que CM' = CM et l'angle $(\widehat{CM'CM})$[1] = θ (de sens direct ou indirect), si M est différent de C ;
– le point M lui-même si M est en C.
La rotation de centre C et d'angle θ est notée R (C, θ).

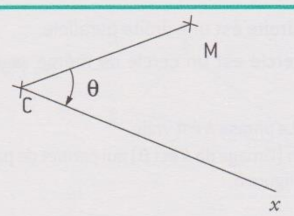
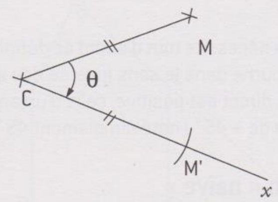
Si M' est l'image de M par R (C, θ), on écrit : M' = R (C, θ) (M).

Cas particulier : R (C, 180°) est le symétrique de centre C -> précision n'a pas d'importance.

FICHE MÉTHODE Tracer l'image d'un point par une rotation

→ Tracer l'image M' de M par R (C, θ)



1. Tracer la demi-droite [C, x) telle que $= \widehat{CM,Cx}$.	
2. Placer le point M' sur [C, x) tel que CM' = CM.	

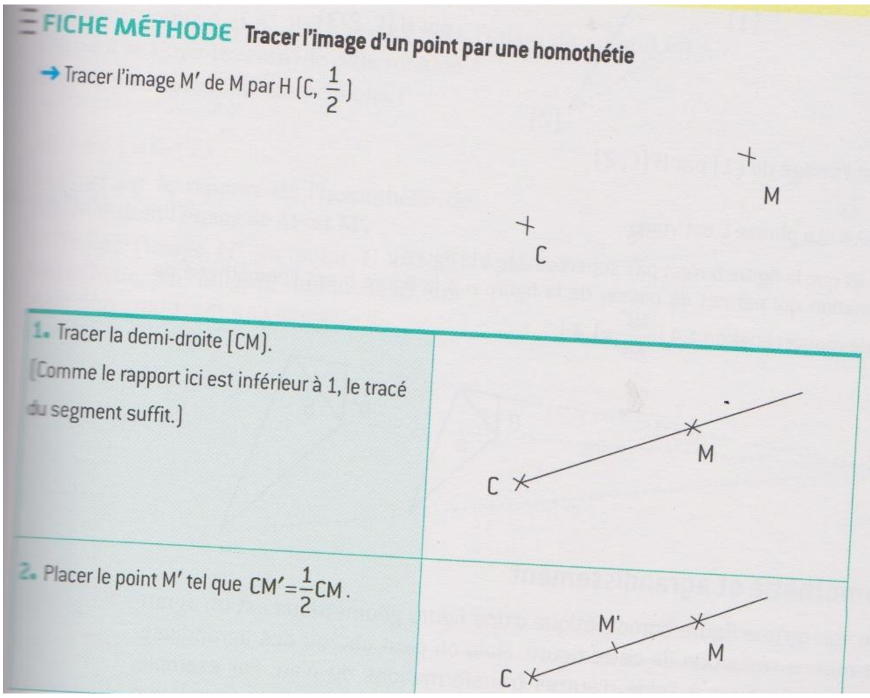
Propriétés des rotations :

- Les **rotations conservent l’alignement, les longueurs, les milieux, les angles (donc l’orthogonalité) et le parallélisme**. Mais l’image d’une droite par une rotation n’est généralement pas une droite qui lui est parallèle.
- L’image d’un cercle est donc un cercle de même rayon dont le centre est l’image du centre.

VI- Homothétie de rapport positif

Définition :

Soit un nombre $k \neq 0$ et un point C. L’image d’un point M par l’homothétie de centre C et de rapport k est le point M’ tel que :
M’ est sur la demi-droite [CM] et $CM' = k \infty CM$.
L’homothétie de centre C et de rapport k est notée $H(C, k)$.

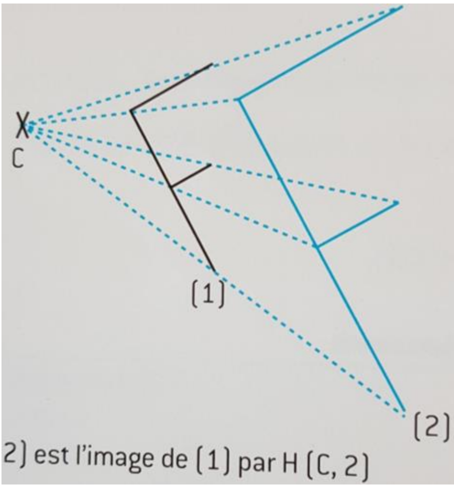


Un point, son image par une homothétie et le centre de l’homothétie sont alignés.

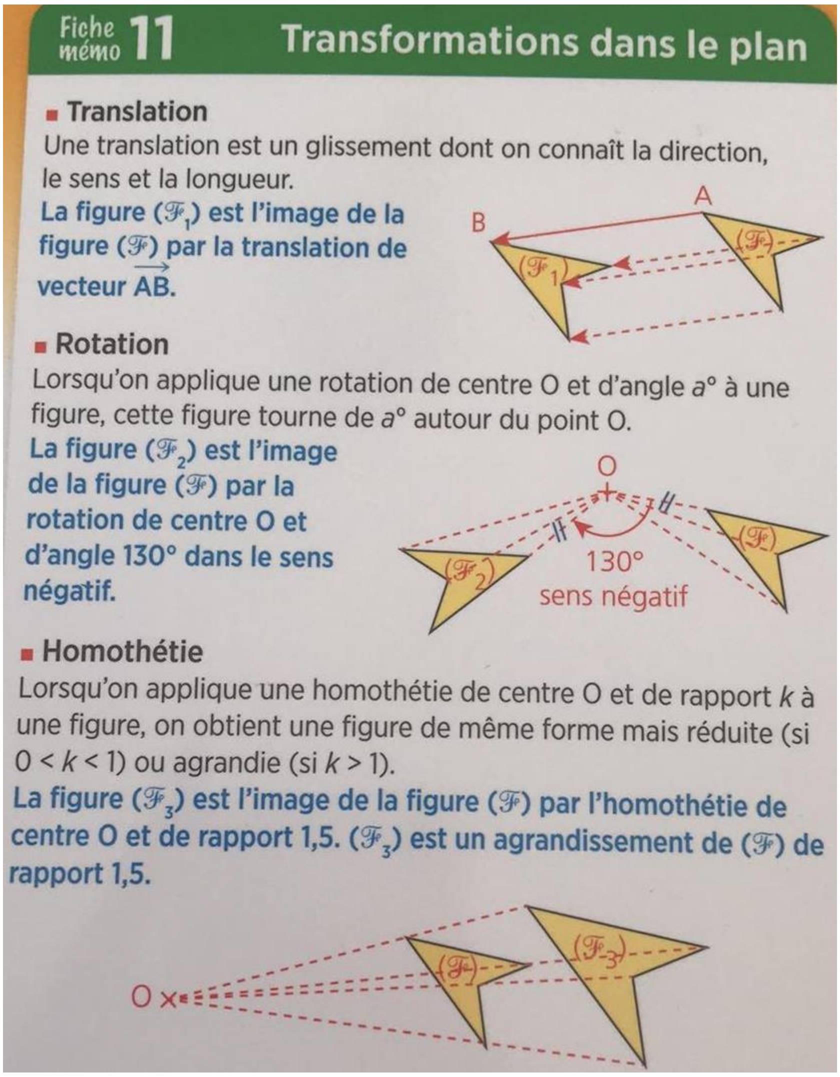
Propriétés des homothéties :

- L’homothétie conserve **l’alignement**, les **milieux**, les **angles**, **l’orthogonalité**, le **parallélisme**, mais en général, pas les longueurs. Elle conserve **l’égalité des longueurs** : des segments de même longueur auront pour image des segments de même longueur,
- L’image d’une droite par une homothétie est une droite qui lui est **parallèle**,
- On démontre que si A’ et B’ sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport k, alors on a **A’B’ = k x AB**.

Une homothétie de rapport k > 1 agrandit une figure / une homothétie de rapport k < 1 réduit une figure.



BILAN



Fiche mémo 11 — Transformations dans le plan

Translation
Une translation est un glissement dont on connaît la direction, le sens et la longueur.
La figure ($\mathcal{F}_1$) est l'image de la figure ($\mathcal{F}$) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Rotation
Lorsqu'on applique une rotation de centre O et d'angle a° à une figure, cette figure tourne de a° autour du point O.
La figure ($\mathcal{F}_2$) est l'image de la figure ($\mathcal{F}$) par la rotation de centre O et d'angle 130° dans le sens négatif.

Homothétie
Lorsqu'on applique une homothétie de centre O et de rapport k à une figure, on obtient une figure de même forme mais réduite (si $0 < k < 1$) ou agrandie (si $k > 1$).
La figure ($\mathcal{F}_3$) est l'image de la figure ($\mathcal{F}$) par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5. ($\mathcal{F}_3$) est un agrandissement de ($\mathcal{F}$) de rapport 1,5.

Translation : tout se conserve et les « vecteurs » (plus utiliser ce terme !) sont tous parallèles.
Rotation : tout se conserve (longueurs, aires, angles etc).